УДК 378.016
ББК 22.126+130
DOI: 10.31862/1819-463X-2025-1-1-265-270

ЗАДАЧИ НА КЛАССИФИКАЦИЮ В ПРОЦЕССЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

А. Л. Чекин

Аннотация. *В настоящей статье речь идет о возможностях использования задач на классификацию в процессе математической подготовки будущих учителей начальных классов. Особое внимание уделяется решению задач на классификацию на множестве натуральных чисел. Множество натуральных чисел дает возможность сформулировать разнообразные задачи на классификацию. Это и задачи на дихотомию, и задачи на разбиение на заданное число бесконечных классов, и задачи на разбиение на бесконечно много конечных классов. Особое внимание уделено задаче на разбиение на бесконечно много бесконечных классов. В статье приводятся различные способы решения этой задачи. Есть решение, основанное на цифровой записи натурального числа. Есть решение, основанное на идее, согласно которой следует в один класс относить все натуральные числа, содержащие в своем разложении на простые множители одно и то же число множителей 2 (естественно, не следует упускать случай нулевого вхождения). При этом множитель 2 можно заменить на любой другой простой множитель. Наконец, приводится решение этой задачи, основанное на предварительном установлении взаимно однозначного соответствия между множеством натуральных чисел и множеством точек координатной плоскости сначала с натуральными координатами, а потом и с целочисленными координатами. Все рассмотренные в статье задачи разного уровня сложности, что дает возможность преподавателю построить занятие, на котором студенты смогут не только показать наличие соответствующих знаний, но и проявить креативный подход.*

Ключевые слова: *подготовка будущих учителей начальных классов, математическая составляющая содержания обучения на факультетах начального образования, изучение элементов теории множеств, задачи на классификацию, классификации на множестве натуральных чисел.*

Для цитирования: *Чекин А. Л.* Задачи на классификацию в процессе математической подготовки будущих учителей начальных классов // Наука и школа. 2025. № 1. Часть 1. С. 265–270. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-1-1-265-270.

CLASSIFICATION PROBLEMS IN THE PROCESS OF MATHEMATICAL TRAINING OF FUTURE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

A. L. Chekin

Abstract. *This article deals with the possibilities of using classification problems in the process of mathematical training of future primary school teachers. Particular attention is paid to the solution of classification problems on the set of natural numbers. The set of natural numbers makes it possible to formulate a variety of classification problems. These are problems on dichotomy, problems on division into a given number of infinite classes, and problems on division into infinitely many finite classes. Special attention is paid to the problem of partitioning into infinitely many infinite classes. The paper gives different ways of solving this problem. There is a solution based on the digital notation of a natural number. There is a solution based on the idea that all natural numbers containing the same number of multipliers 2 in their decomposition into prime factors should be classified into one class (of course, the case of zero occurrence should not be omitted). The multiplier 2 can be replaced by any other prime multiplier. Finally, the solution of this problem is given, based on the preliminary establishment of a one-to-one correspondence between the set of natural numbers and the set of points of the coordinate plane, first with natural coordinates and then with integral coordinates. All the problems considered in the article are of different levels of complexity, which gives the teacher an opportunity to build a lesson where students can not only show the presence of relevant knowledge, but also show their confidence.*

Keywords: *mathematical training of future primary school teachers, mathematical component of teaching content at primary education faculties, study of elements of the theory of sets, classification problems, classifications on the set of natural numbers.*

Cite as: Chekin A. L. Classification problems in the process of mathematical training of future primary school teachers. *Nauka i shkola.* 2025, No. 1, Часть 1. pp. 265–270. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-1-1-265-270.

Содержание математической составляющей подготовки будущих учителей начальных классов традиционно содержит материал, связанный с изучением элементов теории множеств. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, без знания основ теории множеств современный учитель не будет обладать достаточным уровнем математической культуры, что существенно затруднит его возможности по пониманию различных математических текстов, начиная от некоторых заданий из учебников и учебных пособий по математике для начальной школы и заканчивая соответствующими научно-методическими работами. Во-вторых, при изучении количественной теории целых неотрицательных чисел, которая лежит в основе арифметической содержательной линии начального курса математики, знание основ теории множеств является просто необходимым. При этом понимание сущности и особенностей процесса классификации (разбиения множества на попарно непересекающиеся подмножества) является важнейшим теоретико-множественным умением. Для того чтобы студенты овладели этим умением, на практических занятиях обязательно предлагаются задания на проведение классификаций элементов различных множеств. Множество натуральных чисел предоставляет очень много возможностей для постановки разнообразных задач на классификацию. При этом задачи могут быть разной степени сложности: от практически очевидных до достаточно трудных в плане решения [1–4].

Начнем с рассмотрения простейших случаев, к которым относится дихотомия. Множество натуральных чисел можно разбить на два бесконечных класса (например, четные и нечетные натуральные числа). При этом полезно обратить внимание на то, что простые и составные числа не дают нам дихотомическое разбиение множества натуральных чисел, так как число 1 ни к простым, ни к составным числам не относится. Если поставить задачу о проведении дихотомии с условием, что один класс является конечным, то можно ожидать, что студенты смогут предложить несколько вариантов решения. Например, разбиение на однозначные и многозначные числа, на числа первого десятка и все остальные, на числа первой сотни и все остальные и т. д.

Перейдем к разбиению на три класса. Наиболее интересным примером может служить разбиение на простые, составные числа и число 1. В этом примере два класса бесконечных, а один конечный. Можно рассмотреть случаи, когда только один класс из трех будет бесконечным. Например, разбиение на однозначные, двузначные и все остальные натуральные числа является именно таким. Вариаций на эту тему можно предложить сколько угодно.

Следующий интересный случай состоит в разбиении множества натуральных чисел на 10 бесконечных классов. Для решения этой задачи можно обратиться к особенностям десятичной записи натуральных чисел, а именно: в один класс следует отнести все числа, запись которых оканчивается на одну и ту же цифру. Очевидно, что таких классов будет десять и все они будут бесконечными. Но если увеличить число классов, то этот способ разбиения работать не будет. Нужен другой подход.

Предположим, что перед нами стоит задача разбить множество натуральных чисел на 15 бесконечных классов. Для выполнения такого разбиения достаточно привлечь операцию деления с остатком. При делении с остатком произвольного натурального числа на 15 в остатке может получиться одно из чисел 0, 1, 2, ..., 14. Таким образом, в один класс разбиения мы относим все числа, которые имеют один и тот же остаток при делении на 15. Очевидно, что таких классов будет 15 и все они будут бесконечными. Не составляет труда обобщить этот способ разбиения. Его можно применять для разбиения на любое число (начиная с двух) бесконечных классов. Рассматривая этот способ разбиения, можно сообщить студентам, что в данном случае речь идет о классах натуральных чисел по данному модулю (например, по mod 15). Меняя модуль, мы можем получать нужное нам число бесконечных классов. Так, если выбрать в качестве модуля число 2, то мы получим разбиение на четные и нечетные числа, о котором речь шла в начале данной статьи. Следует обратить внимание на одну важную арифметическую особенность получающихся при таком способе разбиения классов. Каждый класс представляет собой арифметическую прогрессию, разность которой равна данному модулю.

Поменяем задачу. Пусть требуется разбить множество натуральных чисел на бесконечно много конечных классов. Начнем с «красивого» решения. Если в первый класс мы определим все однозначные числа, во второй – все двузначные числа, в третий – все трехзначные числа и т. д., то мы получим решение данной задачи.

Попутно можно установить, что в первом классе 9 чисел, во втором – 90 чисел, в третьем – 900 чисел и т. д., то есть каждый следующий класс имеет в 10 раз больше элементов, чем предыдущий (если следовать указанной нумерации классов). Можно провести разбиение на равночисленные классы, например, по 10 элементов. Для этого в первый класс определяем числа первого десятка (от 1 до 10), во второй – числа второго десятка (от 11 до 20), в третий – числа третьего десятка (от 21 до 30) и т. д. Аналогично можно провести разбиение на бесконечно много равночисленных классов при любом заданном числе элементов в одном классе.

Рассмотрим теперь самый интересный случай. Он же является и самым сложным. Речь пойдет о разбиении множества натуральных чисел на бесконечно много бесконечных классов. Начнем с «цифрового» решения. Определим в первый класс все натуральные числа, сумма цифр которых равна 1. Это числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. Во второй класс определим числа, сумма цифр которых равна 2. Это, например, числа 11, 101, 110, 1001 и т. п. или числа 2, 20, 200, 2000 и т. д. В третий класс определяем все числа, сумма цифр которых равна 3 и т. д.

Перейдем теперь к теоретико-числовому решению этой задачи. Определим в первый класс (A_1) все нечетные натуральные числа; во второй (A_2) – все числа, которые делятся на 2, но не делятся на 4; в третий (A_3) – все числа, которые делятся на 4, но не делятся на 8; в четвертый (A_4) – все числа, которые делятся на 8, но не делятся на 16 и т. д. Каждый такой класс можно задать следующим образом:

$$A_k = \{2^{k-1}(2n-1) \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots\} \tag{1}$$

где k принимает натуральные значения.

Обращает на себя внимание тот факт, что каждый класс A_k является арифметической прогрессией с разностью 2^k и начальным членом 2^{k-1}. Таким образом, мы решили задачу о разбиении множества натуральных чисел на бесконечно много классов, каждый из которых (его элементы) образуют арифметическую прогрессию.

Продолжая эксплуатировать эту идею, мы можем получить разбиение множества натуральных чисел на классы по числу вхождения множителя 3 в разложение числа на простые множители, а именно: в первый класс возьмем все числа, в разложении которых нет множителя 3; во второй – все числа, в разложении которых ровно один раз встречается множитель 3; в третий – все числа, в разложении которых ровно два раза встречается множитель 3 и т. д. Задать эти классы можно следующим образом:

$$B_k = \{3^{k-1}m \mid m - \text{натуральное число, которое не делится на 3}\} \tag{2}$$

где k принимает натуральные значения.

В этом случае мы уже не можем сказать, что числа одного класса образуют арифметическую прогрессию. Однако можем утверждать, что множество чисел одного класса представляет собой объединение двух множеств (2 = 3 – 1), элементы каждого из которых образуют арифметическую прогрессию. При этом прогрессии, из которых образован класс B_k, имеют разность 3^k. Аналогично можно построить разбиение по числу вхождений в разложение числа на простые множители множителя 5, потом множителя 7, далее множителя 11 и т. д. (по простым числам). При этом если в основу разложения мы положим, например, множитель 7, то каждый класс можно представить в виде объединения 6 множеств (6 = 7 – 1), где элементы каждого из этих множеств образуют арифметическую прогрессию. Не составляет большого труда установить, какова будет разность таких арифметических прогрессий.

Наконец, рассмотрим решение задачи о разбиении множества натуральных чисел на бесконечно много бесконечных классов с опорой на координатную плоскость. Это решение состоит из двух этапов. Сначала нужно занумеровать натуральными числами все точки координатной плоскости с натуральными координатами (это «целочисленные» точки внутри первого квадранта). Можно взять «целочисленные» точки двух соседних квадрантов, либо все «целочисленные» точки координатной плоскости. Как занумеровать указанные точки – это отдельная задача. Причем задача на доказательство счетности выбранного множества точек. Точки первого квадранта с натуральными координатами можно нумеровать «змейкой», или «по диагонали» (все диагонали параллельны диагонали с концами в точках (1, 2) и (2, 1)), начиная с точки (1, 1) (во втором случае метод нумерации принято называть «косой дождь»). Если нужно занумеровать все точки координатной плоскости с целочисленными координатами, то можно начинать с точки (0, 0), а далее двигаться «по спирали», а можно для нумерации использовать способ «круги на воде», суть которого напоминает распространение кругов на спокойной водной поверхности после того, как в воду бросили камень. После того, как мы занумеровали рассмотренные точки первого квадранта (или координатной полуплоскости, или координатной плоскости), используя для этого все натуральные числа, можно переходить ко второму этапу, то есть к разбиению на классы.

Для примера будем работать с точками первого квадранта с натуральными координатами. Зададим классы следующим образом:

$$C_k = \{n |\ n - \text{номер точки с координатами } (k, m)\} \qquad (3)$$

где k, m принимают все натуральные значения.

Другими словами, в первый класс (C_1) попадают все натуральные числа, которые являются номерами точек с координатами (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) и т. д. Во второй класс (C_2) – все натуральные числа, которые являются номерами точек с координатами (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) и т. д. Можно дать геометрическую интерпретацию полученным классам. Она заключается в следующем. Числа одного класса – это номера точек с натуральными координатами, которые расположены на луче с началом в точке (k, 1) и параллельном оси абсцисс.

Если мы занумеруем все точки координатной плоскости с целочисленными координатами, то образовывать из них классы удобно, опираясь на геометрическую интерпретацию. Например, можно в один класс относить все натуральные числа, которые являются номерами точек, лежащих на горизонтальной прямой. Рассматривая все такие возможные прямые, которые проходят через точки с целочисленными координатами, мы получим бесконечно много бесконечных классов натуральных чисел. Очевидно, что горизонтальные прямые можно заменить на вертикальные. Получим другое решение этой задачи. Не составляет особого труда предложить и другие геометрические интерпретации классов интересующего нас разбиения. Это может быть дополнительным заданием для студентов.

Мы рассмотрели целый ряд задач о разбиении множества натуральных чисел на классы. Этих задач достаточно много, и они разной степени сложности и креативности. Таким образом, при изучении соответствующей темы преподаватель получает возможность существенно повысить уровень математической подготовки будущих учителей начальных классов. При этом при желании может быть успешно реализован дифференцированный подход. Не следует также забывать, что интересные и полезные задачи на классификацию можно конструировать не только на множестве натуральных чисел, но и на других множествах. Например, на различных множествах геометрических фигур: на множестве треугольников, на множестве четырехугольников, на множестве многоугольников и т. п. Решая на занятиях задачи этой категории, мы получаем возможность серьезно поработать с определениями различных геометрических фигур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика и информатика. Ч. 1: учеб. пособие. М.: МПГУ, 2019. 236 с.
2. *Мерзон А. Е., Добротворский А. С., Чекин А. Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М.: Изд-во «Институт практической психологии»; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998. 448 с.
3. *Стойлова Л. П.* Математика: учебник для студентов высш. пед. учеб. заведений. М.: Изд. центр «Академия», 2012. 432 с.
4. *Тонких А. П.* Математика: учеб. пособие для студентов фак. подготовки учителей начал. классов: в 2 кн. М.: Кн. дом «Университет», 2002. Кн. 1. 530 с.

REFERENCES

1. Matematika i informatika. Part 1. Textbook. Moscow: MPGU, 2019, 236 p.
2. Merzon A. E., Dobrotvorskiy A. S., Chekin A. L. *Posobie po matematike dlja studentov fakultetov nachalnyh klassov*. Moscow: Izd-vo “Institut prakticheskoy psihologii”; Voronezh: NPO “MODEK”, 1998. 448 p.
3. Stoylova L. P. *Matematika. Textbook for Students of Higher Pedagogical Educational Institutions.* Moscow: Izd. tsentr “Akademiya”, 2012. 432 p.
4. Tonkikh A. P. *Matematika. Study Guide for Students of Primary School Teacher Training Faculties.* In 2 Books. Moscow: Kn. dom “Universitet”, 2002. Book 1. 530 p.

Чекин Александр Леонидович, доктор педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и информатики в начальной школе, Московский педагогический государственный университет

e-mail: al.chekin@mpgu.su

Chekin Alexandr L., ScD in Education, Associate Professor, Head, Mathematics and Informatics in Primary School Department, Moscow Pedagogical State University

e-mail: al.chekin@mpgu.su

Статья поступила в редакцию 06.02.2025
The article was received on 06.02.2025