УДК 372.851+373.5+378.1
ББК 74.26+74.48

DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-234-244

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Н. Н. Яремко, В. Д. Селютин

Аннотация. *В статье предложены два методических приема обучения школьников решению вероятностных задач: 1) выбором базовой вероятностной математической модели и 2) варьированием вероятностной задачи. В соответствии со свойствами вероятностного пространства в качестве базовых в школьном курсе «Вероятность и статистика» выделены 7 видов вероятностных математических моделей, указаны их существенные свойства. Определены виды варьирования вероятностной задачи: переформулирование, содержательное, сюжетное. В соответствии с предложенными приемами обучения школьников решению вероятностных задач приведены примеры работы с такими задачами, даны комментарии.*

Ключевые слова: *вероятностная задача, обучение решению задач, вероятностная математическая модель, основные виды базовых вероятностных моделей, варьирование вероятностной задачи.*

Для цитирования: *Яремко Н. Н., Селютин В. Д.* Методические приемы обучения школьников решению вероятностных задач // Наука и школа. 2025. № 6. С. 234–244. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-234-244.

METHODOLOGICAL TECHNIQUES OF TEACHING SCHOOLCHILDREN TO SOLVE PROBABILITY PROBLEMS

N. N. Yaremko, V. D. Selutin

Abstract. *The article proposes two methodological techniques for teaching schoolchildren to solve problems on probability: 1) choosing a basic probability mathematical model and*

2) variation of the probability problem. In accordance with the properties of the probability space, 7 types of probability mathematical models are identified as basic in the school course "Probability and Statistics", their essential properties are indicated. The types of variation of probability problems are determined: reformulation, content, plot. In accordance with the proposed methods of teaching schoolchildren to solve probability problems, examples of working with such problems and comments are given.

Keywords: *probability problem, teaching to solution problems, probability mathematical model, main types of basic probability models, variation of a probability problem.*

Cite as: Yaremko N. N., Selutin V. D. Methodological Techniques of Teaching Schoolchildren to Solve Probability Problems. *Nauka i shkola.* 2025, No. 6, pp. 234–244. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-234-244.

Введение

В 2023 г. учебный курс «Вероятность и статистика» введен в российской школе в качестве обязательного компонента основного общего образования. Преподавание теории вероятностей студентам и школьникам имеет много нерешенных методических проблем. Среди них – обучение решению вероятностных задач. Академик Б. В. Гнеденко указывал: «При первоначальном знакомстве с теорией вероятностей необходимо рассмотрение большого числа примеров и задач, которые помогли бы развить своеобразную теоретико-вероятностную интуицию»; освоение «теоретико-вероятностных концепций крайне необходимо» [1]. В наши дни поставленные задачи формирования теоретико-вероятностной интуиции; вероятностного мышления, которые позволят индивиду ориентироваться в условиях отсутствия классического детерминизма, в ситуации стохастической неопределенности, случайности, весьма значимы. Одной из приоритетных целей изучения математики в общем образовании являются умения «распознавать проявления математических закономерностей в реальных жизненных ситуациях, создавать их математические модели»[1]. С опорой на требования ФГОС ООО, ФГОС СОО к предметным результатам освоения учебного курса «Вероятность и статистика» в рамках основного и среднего образования можно констатировать, что достижение обучающимися планируемых результатов освоения программы обеспечивается сформированностью следующих умений:

«свободно оперировать понятиями: случайный эксперимент, элементарный исход случайного эксперимента, случайное событие, вероятность события, условная вероятность, независимые события;

- находить вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями;
- оценивать вероятности реальных событий и явлений;
- выполнять операции над случайными событиями, находить вероятности событий, в том числе с применением формул и графических схем (диаграмм Эйлера, графов);
- моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат;

[1] Федеральная рабочая программа по учебному предмету Математика. Приказ Минпросвещения России от 18.05.2023 N 370 (ред. от 19.03.2024) Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования (Зарегистрирован 12.07.2023 N 74223).

- распознавать и выбирать подходящий метод для решения задачи, математические и факты и математические модели»[2].

Таким образом, обучение школьников решению вероятностных задач на основе построения или выбора математической модели стохастической ситуации является одной из приоритетных целей общего математического образования.

Выявлению *специфики вероятностных задач* посвящены исследования ряда ученых-педагогов и педагогов- математиков. Среди них диссертационное исследование В. В. Фирсова [2], в котором обоснован *прикладной характер вероятностной задачи*. К другим особенностям вероятностных задач можно отнести следующее.

1. Вероятностные задачи *не формализованные*, непосредственное применение пакетов компьютерной алгебры, как, например, для многих задач математического анализа или алгебры, не представляется возможным. Для задач такого сорта нет «автоматических решателей». Интернет-поисковики дают ссылку на «прецедент». Использование ИИ дает прецедентное решение. И оно вызывает большие сомнения, так как решение, полученное от ИИ, равновероятно – как правильное, так и неверное! [3]
2. Вероятностные задачи «*чувствительны» к деталям*: даже небольшие изменения в тексте задачи приводят к существенным разночтениям в трактовке, в понимании задачи и, в конечном счете, к выбору метода решения.
3. Основная часть вероятностных задач – *текстовые, сюжетные*; они описывают реальные жизненные или приближенные к реальным ситуациям на неформально-математическом языке.

Руководствуясь поставленными целями обучения школьников учебному курсу «Вероятность и статистика» и опираясь на выявленную специфику вероятностных задач, рассмотрим *два методических приема* обучения школьников решению задач такого сорта:

1) выбором базовой вероятностной модели;
2) варьированием вероятностной задачи.

I. Основные виды базовых вероятностных математических моделей школьного курса «Вероятность и статистика»

Выделение основных видов базовых вероятностных моделей школьного курса вероятности выполним на основе общепринятого определения вероятностного пространства [1; 4; 5]. Каждая **вероятностная математическая модель** случайного эксперимента имеет вид тройки объектов (Ω, W, P), где

Ω – совокупность всех элементарных исходов, каждое случайное событие A является некоторым множеством элементарных исходов, то есть подмножеством множества Ω,

W – совокупность всех возможных событий, множество W – это «сигма»-алгебра подмножеств множества Ω,

P – неотрицательная функция, областью определения которой является множество W, а областью значений – отрезок [0, 1]. Каждому событию $A \in W$ функция P ставит в соответствие число $P(A)$, понимаемое как вероятность события A.

[2] Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (зарег. 05.07.2021 № 64101) с изм. от 17.08.2022; Приказ Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (зарег. 07.06.2012 г. № 24480) с изм. от 12.09.2022.

В программу школьного курса «Вероятность и статистика» это определение не входит.

Проведем детализацию приведенного вузовского определения вероятности случайного события в зависимости от свойств множества всех элементарных исходов Ω и множества W – алгебры подмножеств множества Ω. Проведение такой детализации приводит к приемлемому для школьного курса вероятности перечню основных видов базовых вероятностных математических моделей (см. ниже). Отличительные признаки математических моделей в следующем перечне выделены курсивом.

Основные виды базовых вероятностных математических моделей и их признаки:

1. Модель случайного эксперимента *с конечным числом равновозможных исходов* – классическая вероятность (8-й класс). Модель случайного эксперимента *с выбором без возврата* – схема урн (8-й класс).
2. Модель случайного эксперимента *с бесконечным числом равновозможных исходов* – геометрическая вероятность (9-й класс).
3. Статистическое определение вероятности случайного события – в качестве оценок вероятностей событий берутся *их относительные частоты при достаточно большом числе испытаний* (7-й класс, 9-й класс).
4. Модель случайного эксперимента, *основанная на теоремах о вероятности случайных событий: вероятность суммы и произведения событий, вероятность противоположного события, условная вероятность* (8-й класс).
5. Схема Бернулли. Модель случайного эксперимента *с выбором с возвращением*. *Вероятность появления k успехов в серии n независимых испытаний с двумя исходами «успех»/«неуспех»* (10-й класс).
6. *«Двухшаговый» случайный эксперимент* – формула полной вероятности (10-й класс).
7. *Апостериорная (послеопытная, условная) вероятность* – формула Байеса (10-й класс).

Название «базовые» вероятностные модели мы взяли вслед за Е. А. Бунимовичем и В. А. Булычевым в соответствии с работой [6], а также полностью разделяем их высказывание, приведенное в работе [7]: «Если в вузе основной акцент делается на изучение математического аппарата для исследования вероятностных моделей, то в школе ученик должен научиться эти модели строить, анализировать, проверять их адекватность реальным ситуациям. Такую точку зрения разделяют сегодня большинство ученых, занимающихся проблемами школьного математического образования» [7].

II. Варьирование вероятностной задачи – это изменение любых ее компонентов [8; 9]

Виды варьирования:

- *содержательное* – вид варьирования, при котором изменяются какие-либо компоненты в содержательном составе задачи: условие, требование, решение, теоретических базис; при содержательном варьировании вероятностной задачи происходит переход к другой математической модели из приведенного в п. 1 списка базовых вероятностных моделей;
- *сюжетное* – вид варьирования, при котором изменяется фабула (сюжет) задачи, то есть и числовые данные, и модель, и решение остаются без изменений;

- *переформулирование* – вид варьирования, при котором задача остается прежней, эквивалентной, меняется словесная формулировка задачи: другими словами, более понятно для школьника описывается эксперимент и случайное событие, вероятность которого нужно найти. Цель переформулирования состоит в том, чтобы особенности эксперимента и случайного события, необходимые для выбора модели из списка, указанного в п. 1., стали бы более ярко выраженными, очевидными.

III. План работы с вероятностной задачей [10]

1. Опишите эксперимент, о котором идет речь в задаче. Приведите примеры элементарных исходов этого эксперимента. Если необходимо, проведите переформулирование задачи, чтобы лучше осознать ее содержание.
2. Опишите событие, вероятность которого требуется найти в задаче. Чаще всего это событие содержится в требовании (в вопросе) задачи. Приведите примеры благоприятных/неблагоприятных исходов.
3. Выберите и обоснуйте теоретический базис решения задачи, то есть выберите математическую модель стохастической ситуации, описанной в задаче, обоснуйте этот выбор. Используйте список основных видов базовых вероятностных математических моделей и их признаки из п. 1.
4. Решите задачу в выбранной математической модели.
5. Осуществите взгляд назад. Для этого ответьте на вопросы:

- Ответ задачи правдоподобен?
- Есть ли другое решение задачи?
- Есть ли другой метод решения задачи?
- Можно ли для решения задачи выбрать другую математическую модель?
- Какие изменения в условии и в требовании задачи приведут к выбору другого теоретического базиса?
- Проведите варьирование задачи, предложите и решите задачи, полученные в результате варьирования.

6. Запишите ответ.

В задаче описаны случайное событие и случайный эксперимент, в рамках которого это событие происходит. Необходимо выявить их существенные особенности, признаки, характерные свойства, поскольку именно они ведут к построению или адекватному выбору базовой вероятностной математической модели описанной в задаче стохастической ситуации.

IV. Примеры решения задач, комментарии

План работы с вероятностной задачей. Переформулирование задачи

Задача 1. Маша бросает правильный игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадет число очков, меньшее 3.

Работа с задачей. Решение первым способом.

1. Эксперимент – бросание кубика. Элементарные исходы (события) – выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков.

2. Событие A – выпадение очков, меньших 3.

3. Полная группа элементарных событий – конечна, их число n = 6. Элементарные исходы – равновозможны, так как кубик правильный. Благоприятные исходы эксперимента для события A – выпадение 1 или 2 очков, число благоприятных исходов $m = 2$. Стохастическая ситуация *моделируется на основе классического определения вероятности случайного события*, ***модель 1 из списка базовых моделей п. 1.***

4. По классическому определению вероятности: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

5. Ответ правдоподобный.

Другой метод решения задачи может быть основан на теореме о сумме вероятностей несовместных событий, приводим его ниже.

6. Ответ 1/3.

Работа с задачей. Решение вторым способом с использованием теоремы о вероятности суммы событий отличается в пунктах 3 и 4, ***модель 4 из списка базовых моделей***.

3. Событие A представляет собой сумму несовместных событий, так как требуется найти вероятность выпадения одного очка ***или*** двух очков:

$$A = \{\textit{выпало } 1 \textit{ очко}\} \cup \{\textit{выпало } 2 \textit{ очка}\}.$$

4. Используем теорему о сумме вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = P\{\textit{выпало } 1 \textit{ очко}\} + P\{\textit{выпало } 2 \textit{ очка}\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Комментарий: решение задачи 1 с помощью выбора разных моделей демонстрирует возможность вариативности в выборе модели и служит проверкой правильности решения задачи.

Задача 2. Маша бросает кубик дважды, суммируя выпавшие очки. Какова вероятность того, что на одном из кубиков выпало число 5, если в сумме у нее получилось 8 очков?

Работа с задачей. Решение.

1. Эксперимент – это двукратное подбрасывание кубика и суммирование выпавших очков. Элементарные исходы (события) – сумма выпавших на кубиках очков принимает значения 2, 3, 4, 5,…, 10, 11, 12.

2. Событие A: выпадение на одном из кубиков 5 очков, при условии, что на двух кубиках сумма равна 8. Это задача на вычисление условной вероятности.

Переформулируем задачу в эквивалентной форме: Маша бросает кубик дважды, в сумме у нее получается 8 очков. Какова вероятность того, что на одном из кубиков выпало число 5? При таком переформулировании задачи эксперимент уже будет другой, и он будет состоять в том, что при двукратном подбрасывании кубика сумма выпавших очков равна 8. Элементарные исходы для этого эксперимента: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2 (всех исходов – пять, исходы равновозможны). Из них будут два исхода благоприятными для события A, то есть: 3 + 5; 5 + 3.

3. Полная группа элементарных исходов – конечна, их число $n = 5$, элементарные исходы равновозможны, так как кубик правильный. Благоприятные исходы эксперимента для события A – выпадение 2 + 6 очков или 6 + 2 очков, их число равно 2, $m = 2$. Стохастическая ситуация моделируется на основе классического определения вероятности случайного события.

4. По классическому определению вероятности: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5} = 0,4$.

5. Ответ правдоподобный.

6. Ответ 0,4.

Комментарий: переформулирование задачи ведет к изменению вероятностного пространства, но модель остается прежней – классическая вероятность, поскольку исходов конечное число и они равновозможны.

Задача 3. Папа принес домой в одном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых – красные, остальные – белые. Двое детей берут по фрукту и один фрукт берет мама. С какой вероятностью маме достанется белый грейпфрут, если у обоих детей оказались белые грейпфруты?

Работа с задачей. Решение. Переформулируем задачу в эквивалентной форме. Папа принес домой в одном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные – белые. Двое детей берут по фрукту, ***которые оказываются белыми,*** а затем один фрукт берет мама. С какой вероятностью маме достанется белый грейпфрут?

После переформулирования задачи стохастическая ситуация легко моделируется на основе классического определения вероятности случайного события.

Событие A – мама возьмет белый грейпфрут, если два белых грейпфрута из пакета достали дети,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{13}\approx 0,77.$$

Комментарий: переформулирование задачи приводит к изменению пространства элементарных исходов, но вид модели остается прежний – классическая модель вероятности случайного события.

Задача 4 [6, с. 151, № 11.21]. Колоду из 36 карт раздают поровну на двоих. какова вероятность того, что тузов у них окажется поровну?

Работа с задачей. Решение [6, с. 254]. ***Переформулируем*** задачу: вы берете себе 18 карт из 36. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно 2 туза? Решение по схеме урн.

Ответ: 0, 397.

Комментарий: переформулирование задачи делает процедуру выбора математической модели более явной: классическая модель вероятности случайного события, схема урн.

Сюжетное варьирование: при решении задачи базовая вероятностная математическая модель не меняется

Задача 1. В конверте 20 семян тыквы, из них одно семечко непригодное. Поочередно наугад выбирают для посадки 5 штук. Какова вероятность того, что непригодное семечко окажется среди выбранных для посадки?

Задача 2. Андрей Удалов служит во взводе, насчитывающем 20 солдат. Во время учений по жребию выбирают пять солдат, чтобы направить в разведку. Какова вероятность, что Андрей Удалов пойдет в разведку?

Решение задач 1 и 2. $P(A)=\dfrac{5}{20}=0,25.$

Комментарий: изменение фабулы задачи не приводит к другой математической модели, модель остается прежней – классическая вероятность.

Задача 3*.* При поступлении в университет Тимофей познакомился с Ириной. Всех 26 первокурсников предстоит случайным образом распределить на 2 равные учебные группы. Какова вероятность того, что Тимофей окажется в одной группе с Ириной?

Задача 4*.* 26 человек – участников олимпиады – рассаживают по двум аудиториям, поровну в каждую аудиторию. Какова вероятность того, что два участника олимпиады – Ольга и Мария – попадут в одну аудиторию.

Решение задач 3 и 4. $P(A)=\dfrac{12}{25}=0{,}48$.

Комментарий: изменение фабулы задачи не приводит к другой математической модели, модель остается прежней – классическая вероятность.

Задача 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для каждого из трех стрелков равна, соответственно, 0,7; 0,8 и 0,9. Стрелки стреляют независимо друг от друга. Какова вероятность, того что в мишени окажется хотя бы одна пробоина?

Задача 6. Вероятность доставки некоторого товара для каждого из трех магазинов равна соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Товар из каждого магазина может быть доставлен независимо друг от друга. Какова вероятность того, что товар будет доставлен хотя бы из одного магазина?

Решение задач 5 и 6. $P(A)=1-0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}994$.

Комментарий: изменение фабулы задачи не приводит к другой математической модели, модель остается прежней, основанной на алгебре событий.

Содержательное варьирование задачи (на примере одной задачи)

Задача 1. Папа принес домой в одном непрозрачном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные – белые. Двое детей берут по одному фрукту и мама берет один фрукт. С какой вероятностью ей достанется белый грейпфрут? (Формула полной вероятности. Ответ: 0,8.)

Задача 2*.* Папа принес домой в одном непрозрачном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные – белые. Двое детей берут по одному фрукту и мама берет один фрукт. Мама достала белый грейпфрут. Какова вероятность того, что дети взяли по белому грейпфруту? (Формула Байеса, условная вероятность. Ответ: 0,6.)

Задача 3*.* Папа принес домой в одном непрозрачном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные — белые. Двое детей берут по одному фрукту и мама берет один фрукт. С какой вероятностью ей достанется белый грейпфрут, если у обоих детей оказались белые грейпфруты? (Условная вероятность. Ответ: 0,77.)

Задача 4. Папа принес домой в одном непрозрачном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные — белые. Двое детей берут по одному фрукту и мама берет один фрукт. С какой вероятностью и дети, и мама возьмут грейпфруты одного цвета? (Формула полной вероятности или теоремы о сумме вероятностей несовместных событий и об умножении вероятностей зависимых событий. Ответ: 0,49.)

Задача 5*.* Папа принес домой в одном непрозрачном пакете 15 грейпфрутов, 3 из которых красные, остальные – белые. Двое детей берут по одному фрукту и мама берет один фрукт. Какова вероятность того, что мама и дети вместе достанут ровно 2 белых и 1 красный грейпфрутов? (Схема урн, схема выбора без возврата. Ответ: 0,44.)

Комментарий: содержательное варьирование задачи приводит к выбору другой математической модели для решения, выбор модели обусловлен особенностями описанного в задаче эксперимента и случайного события, вероятность которого требуется найти.

Заключение

Главная трудность решения вероятностных задач состоит в осознании школьником существенных сторон описанной в задаче стохастической ситуации и переводе ее на язык абстрактных вероятностных понятий, математических отношений и символов, то есть *выборе или построении математической вероятностной модели* [11–13], при этом окажется полезным список в п. 1. Для выявления особенностей эксперимента и случайного события и адекватного выбора базовой вероятностной модели желательно визуализировать случайный эксперимент, то есть перевести текстовую информацию в другой формат, более наглядный, более легко воспринимаемый. Для этого сделать картинки, изобразить схему, таблицу, использовать графы, круги Эйлера, эксперимент провести в режиме реального времени. Выполнить варьирование задачи. Предложить ученикам «своими словами» описать эксперимент и случайные события, которые происходят в рамках данного эксперимента, выделить их существенные свойства, соотношения и связи. Далее, когда задача осознана учениками и ученики могут указать существенные признаки эксперимента и случайных событий в данном эксперименте, перейти к созданию или выбору математической модели стохастической ситуации, описанной в задаче.

Основные понятия теории вероятностей: случайный эксперимент, элементарные исходы, случайное событие, равновозможные/неравновозможные исходы, вероятность случайного события – это абстракции, которые лежат в основе построения математических вероятностных моделей. Перечисленные понятия не могут быть строго определены в рамках школьного курса «Вероятность и статистика», для их строгого определения необходим аксиоматический подход, который в применении к теории вероятностей в школе не изучается. Перечисленные основные понятия теории вероятностей не определяются через более простые, они могут быть описаны, проиллюстрированы большим количеством примеров, выявлением существенных признаков и свойств. Длительный опыт обучения студентов и школьников теории вероятностей показывает, что понятия теории вероятностей сложны для понимания и осознания обучающимися. Так, например, алгебра случайных событий школьниками осваивается с бóльшим трудом, чем алгебраические или арифметические операции и отношения, такие как сложить/вычесть, умножить/разделить, «больше»/«меньше», увеличить/уменьшить. Случайные события и эксперименты, которыми необходимо оперировать, нельзя «взвесить, измерить, сосчитать».

Ученики порой формально, не до конца осознавая обоснованность своих действий, следуя стереотипу, шаблону, манипулируя числовыми данными задачи, приводят «верное решение». Но вопросы: «Какое теоретическое обоснование у твоего решения? Какую вероятностную модель ты использовал? ПОЧЕМУ ты решал именно так, а не иначе?» – ставят их в тупик. Требование учителя обосновать теоретически решение вероятностной задачи учениками воспринимается сложно. И очень часто, пользуясь при решении теоремами умножения или сложения вероятностей, ученик тем не менее отвечает: «Решал по классическому определению вероятности!», то есть дает совсем неправильный ответ. Возможно, для более успешного обучения школьников курсу «Вероятность и статистика» необходима сформированность не только предметного типа мышления, который, ввиду возраста, преобладает у большинства школьников 7–8-х классов, а мышления более высокого уровня абстракции – понятийного или категориального?

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. Изд. 6-е. М.: Наука. 1988. 445 с.
2. *Фирсов В. В.* Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине: дис. … канд. пед. наук. М., 1974. 161 с.
3. *Яремко Н. Н., Селютин В.Д., Яковлева Ю.А.* Обучение теории вероятностей с использованием искусственного интеллекта // Мир науки. Педагогика и психология. 2024. Т. 12, № 5. URL: https://mir-nauki.com/PDF/60PDMN524.pdf (дата обращения: 12.03.2025).
4. *Королев В. Ю., Шестаков О. В.* Вероятностные модели: учеб. пособие. М.: МаксПресс, 2020. 266 с.
5. *Горбачев В. И., Пузырева Е. Н., Трошина Н. В.* Систематизация моделей учебных теорий математических пространств в содержании общего образования // Наука и школа. 2024. № 6. С. 102–115. DOI: https://doi.org/10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.
6. *Бунимович Е. А., Булычев В. А.* Основы статистики и вероятность. М.: Дрофа, 2004. 288 с.
7. *Бунимович Е. А., Булычев В. А.* Вероятность и статистика... Лекции 1–4. 2005 // Библиотека Mathedu.Ru. URL: https://www.mathedu.ru/text/bunimovich_bulychev_veroyatnost_i_statistika_lekczii_1-4_2005/p7/ (дата обращения:12.03.2025).
8. *Селютин В. Д., Яремко Н. Н.* Варьирование математической задачи как средство овладения теорией вероятностей // Образование и общество. 2021. Т. 127, № 2. С. 55–60.
9. *Yaremko N. N., Selutin V. D.* The Problem Modification Method: A Key to Understanding Probability Theory // The Impact of Digitalization in a Changing Educational Environment. IGI Global, 2023. P. 252–263. URL: https://www.igi-global.com/chapter/the-problem-modification-method/330896 (дата обращения: 12.05.2025).
10. *Яремко Н. Н., Яковлева Ю. А.* Четыре шага Пойа решения задачи по теории вероятностей // Учебный эксперимент в образовании. 2024. № 1 (109). С. 115–126. DOI: https://doi.org/10.51609/2079-875X_2024_1_115.
11. *Егупова М. В.* Практико-ориентированное обучение математике в школе как предмет методической подготовки учителя: моногр. М.: МПГУ, 2014. 284 с.
12. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226. DOI: https://doi.org/10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.
13. *Яремко Н. Н., Яковлева Ю. А.* Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4. С. 53–64. DOI: https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004.

REFERENCES

1. Gnedenko B. V. *Kurs teorii veroyatnostey.* Moscow: Nauka. 1988. 445 p.
2. Firsov V. V. Nekotorye problemy obucheniya teorii veroyatnostey kak prikladnoy distsipline. *PhD dissertation (Education).* Moscow, 1974. 161 p.
3. Yaremko N. N., Selyutin V.D., Yakovleva Yu.A. Obuchenie teorii veroyatnostey s ispolzovaniem iskusstvennogo intellekta. *Mir nauki. Pedagogika i psikhologiya.* 2024, Vol. 12, No. 5. *Available at:* https://mir-nauki.com/PDF/60PDMN524.pdf (accessed: 12.03.2025).
4. Korolev V. Yu., Shestakov O. V. *Veroyatnostnye modeli: ucheb. posobie.* Moscow: MaksPress, 2020. 266 p.
5. Gorbachev V. I., Puzyreva E. N., Troshina N. V. Sistematizatsiya modeley uchebnykh teoriy matematicheskikh prostranstv v soderzhanii obshchego obrazovaniya. *Nauka i shkola.* 2024, No. 6, pp. 102–115. DOI: https://doi.org/10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.
6. Bunimovich E. A., Bulychev V. A. *Osnovy statistiki i veroyatnost.* Moscow: Drofa, 2004. 288 p.
7. Bunimovich E. A., Bulychev V. A. Veroyatnost i statistika... Lektsii 1–4. 2005. In: Biblioteka Mathedu.Ru. *Available at:* https://www.mathedu.ru/text/bunimovich_bulychev_veroyatnost_i_statistika_lekczii_1-4_2005/p7/ (accessed:12.03.2025).

8. Selyutin V. D., Yaremko N. N. Varyirovanie matematicheskoy zadachi kak sredstvo ovladeniya teoriey veroyatnostey. *Obrazovanie i obshchestvo*. 2021, Vol. 127, No. 2, pp. 55–60.
9. Yaremko N. N., Selutin V. D. The Problem Modification Method: A Key to Understanding Probability Theory. In: The Impact of Digitalization in a Changing Educational Environment. IGI Global, 2023. P. 252–263. *Available at:* https://www.igi-global.com/chapter/the-problem-modification-method/330896 (accessed: 12.05.2025).
10. Yaremko N. N., Yakovleva Yu. A. Chetyre shaga Poya resheniya zadachi po teorii veroyatnostey. *Uchebnyy eksperiment v obrazovanii*. 2024, No. 1 (109), pp. 115–126. DOI: https://doi.org/10.51609/2079-875Kh_2024_1_115.
11. Egupova M. V. *Praktiko-orientirovannoe obuchenie matematike v shkole kak predmet metodicheskoy podgotovki uchitelya: monogr.* Moscow: MPGU, 2014. 284 p.
12. Vetokhin A. N., Deza E. I. O meste teoretiko-veroyatnostnykh zadach v matematicheskoy podgotovke shkolnikov. *Nauka i shkola*. 2023, No. 2, pp. 214–226. DOI: https://doi.org/10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.
13. Yaremko N. N., Yakovleva Yu. A. Osobennosti matematicheskogo modelirovaniya pri obuchenii teorii veroyatnostey. *Prostranstvo pedagogicheskikh issledovaniy*. 2024, Vol. 1, No. 4, pp. 53–64. DOI: https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004.

Яремко Наталия Николаевна, доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике, Московский педагогический государственный университет

e-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko Natalia N., ScD in Education, Professor, Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science Department, Moscow Pedagogical State University

e-mail: yaremki@yandex.ru

Селютин Владимир Дмитриевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры алгебры и математических методов в экономике, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

e-mail: selutin_v_d@mail.ru

Selutin Vladimir D., ScD in Education, Professor, Algebra and Mathematical Methods in Economics Department, Oryol State University named after I. S. Turgenev

e-mail: selutin_v_d@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.05.2025
The article was received on 18.05.2025