УДК 372.851
ББК 74.200

DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-231-245

ИНТЕГРАЦИОННЫЙ КОМПОНЕНТ В СТРУКТУРЕ ПОНЯТИЯ «ЕДИНСТВО МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ» ОБУЧАЮЩИХСЯ В ОСНОВНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Д. В. Юрченко

Аннотация. *Данная статья посвящена актуальной проблеме формирования интеграционного компонента в структуре понятия «единство математических знаний» обучающихся. Изучение научной и методической литературы показало, что единство математических знаний обучающихся строится на установлении интеграционных связей на двух уровнях: внутреннем (внутри предмета «математика») и внешнем (между различными школьными дисциплинами). В рамках данного исследования сделан акцент на внутреннем уровне интеграции математических знаний, а именно подробно описаны различные основания (системообразующие факторы), в рамках которых подобная интеграция может осуществляться. К таким основаниям относятся специальные методы обучения математике: аксиоматический метод, алгебраический и геометрический методы, метод математического моделирования; ведущие содержательно-методические линии школьного курса математики; математические структуры. Описание каждого основания сопровождается примерами учебных заданий, внедрение которых в реальный учебный процесс, на наш взгляд, будет способствовать решению проблемы формирования интеграционного компонента.*

Ключевые слова: *единство математических знаний, интеграционный компонент, интеграционные связи, внутренний и внешний уровни интеграции, системообразующие факторы интеграции.*

Для цитирования: *Юрченко Д. В.* Интеграционный компонент в структуре понятия «единство математических знаний» обучающихся в основной и средней школе // Наука и школа. 2024. № 6. С. 231–245. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-231-245.

THE INTEGRATION COMPONENT IN THE STRUCTURE OF THE CONCEPT OF “UNITY OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE” OF GENERAL AND SECONDARY SCHOOL STUDENTS

D. V. Yurchenko

Abstract. *The article is devoted to the current problem of the formation of an integration component in the structure of the concept of unity of mathematical knowledge. The study of academic and methodological literature has revealed that the establishment of integration links between educational elements is carried out at two levels: internal (within the subject of mathematics) and external (the establishment of integrative links between related school disciplines). The emphasis is placed on the internal level of integration of mathematical knowledge, namely, the various bases (system-forming factors) within which such integration can be carried out and described in detail. Such grounds include the special methods of teaching mathematics: axiomatic method, algebraic and geometric methods, mathematical modeling method; leading content and methodological lines of the school mathematics course; mathematical structures. The description of each foundation is accompanied by examples of educational tasks, the introduction of which into the actual educational process will contribute to solving the problem of forming an integration component.*

Keywords: *unity of mathematical knowledge, integration component, integration links, internal and external levels of integration, system-forming factors of integration.*

Cite as: Yurchenko D. V. The integration component in the structure of the concept of “unity of mathematical knowledge” of general and secondary school students. *Nauka i shkola.* 2024, No. 6, pp. 231–245. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-231-245.

Концепция развития математического образования в России предусматривает, что изучение и преподавание математики производится в рамках учебного плана при обеспечении последовательности содержания и укрепления взаимосвязей математики с естественными, гуманитарными и социальными науками [1].

В процессе осуществления такой преемственности возникает потребность в комплексном формировании ***единства математических знаний обучающихся***, под которым мы понимаем «целостное восприятие обучающимися математики как учебного предмета, характеризующееся высоким уровнем овладения необходимыми ЗУН, наличием целевой установки получаемых знаний, пониманием интегративных связей между ними на всех уровнях системообразующих процессов, умением применять полученные знания для решения задач различного уровня сложности, а также задач, поставленных жизнью» [2, с. 7].

В структуре понятия единства математических знаний мы выделяем два основания:

- ***аксиологическое***, включающее компонент целеполагания;
- ***гносеологическое***, которое включает когнитивный, интеграционный (внутренний и межпредметный уровни), практический и рефлексивный компоненты [2].

Анализ современной литературы по методике обучения математики (Е. И. Смирнов, К. Н. Лунгу, Н. В. Измайлова, Н. В. Борисова, В. С. Абатурова, В. В. Богун, А. М. Маскаева) показал, что одна из серьезнейших проблем современного математического образования заключается в том, что даже с учетом обеспечения преемственности учебного содержания в реальном процессе обучения изучаемый конкретный материал зачастую не складывается в единую систему знаний школьников, то есть формирование вышеназванных компонентов, в частности интеграционного, реализуется слабо.

Цель данного исследования заключается в изучении интеграционного компонента единства математических знаний, где основной упор делается на внутренний уровень интеграции, который подразумевает использование различных методов и форм обучения, направленных на установление взаимосвязей между основными математическими понятиями внутри математических дисциплин, что формирует целостную систему знаний обучающихся [2].

Е. И. Смирнов выделяет четыре уровня интеграционных связей внутри предмета «Математика», а именно:

1) локальные уровни, где материал связан внутри одного математического понятия;
2) частносистемные, где устанавливаются связи между определенными понятиями, свойствами и теоремами в рамках одного дидактического модуля;
3) внутрисистемные, где происходит связь между различными модулями одной учебной дисциплины;
4) межсистемные, которые отображают связи между теми или иными темами различных математических дисциплин [3].

Решение проблемы установления внутренних интеграционных связей требует определенности в выборе системообразующего фактора (основания для объединения), в соответствии с которым эта интеграция будет осуществляться [3]. Системообразующим фактором интеграции школьного курса математики на всех уровнях системообразующего процесса могут выступать различные основания. Рассмотрим некоторые из них.

Специальные методы обучения математики (аксиоматический, метод математического моделирования, алгебраический и геометрический методы)

На протяжении длительного периода развития российской системы математического образования педагоги и исследователи стремились преодолеть разрыв между школьным курсом математики и научными знаниями в этой области. То есть, с одной стороны, теоретический уровень изложения программного материала должен быть достоверным и приближенным к его научной трактовке, с другой – быть информативным и доступным для школьников различного уровня подготовки. Следовательно, взаимосвязь научного подхода и способов познания, доступных для понимания школьниками в границах определенного учебного предмета, должна быть оптимальной. Именно такую проблему решают специальные методы обучения, когда основные методы самой математической науки адаптируются к изучению математических дисциплин в школе [4]. Одним из таких методов является ***«аксиоматический метод».***

Роль аксиоматического метода как системообразующего фактора в формировании представления о единстве различных математических дисциплин заключается в абстрагировании от природы конкретного математического объекта. При выделении существенных особенностей поведения различных групп неких математических элементов и при условии, что данные особенности описываются одинаково, нет смысла рассматривать каждый объект отдельно, а следует изучать некую абстрактную систему, сохраняющую устойчивое отношение свойств тех частных элементов, при рассмотрении которых данная аксиоматическая система была создана [5].

Задача 1. Рассмотреть множество целых чисел Z с введением на этом множестве операции сложения «+», множество рациональных положительных чисел Q^+ с введением на этом множестве операции умножения «•», множество векторов на плоскости *V* с введением на этом множестве операции сложения «+», в понимании, что $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$.

Решение. Заметим, что, хотя элементы данных множеств имеют различную природу (числа, векторы), а введенные операции – различный смысл, эти операции на указанных множествах Z, Q^+, *V* характеризуются одними и теми же свойствами (табл. 1).

Таблица 1

Свойства операций на различных множествах

Z	**Q^+**	**V**
Для любых $x, y \in Z$ существует $z \in Z$ такое, что $x + y = z$	Для любых $x, y \in Q^+$ существует $z \in Q^+$ такое, что $x \bullet y = z$	Для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V$ существует $\vec{z} \in V$ такое, что $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$
Для любых $x, y, z \in Z$ выполняется $(x + y) + z = x + (y + z)$	Для любых $x, y, z \in Q^+$ выполняется $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$	Для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ выполняется $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
Для любых $x, y \in Z$ выполняется $x + y = y + x$	Для любых $x, y, \in Q^+$ выполняется $x \bullet y = y \bullet x$	Для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ выполняется $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
…	…	…

Не будем продолжать выписывать одинаковые свойства. Далее возникает задача логической совокупности данных свойств. Так как операции «+», «•», «+» векторов определяют соответственно на множествах Z, Q^+, *V* одни и те же структуры, то нет смысла рассматривать каждое множество по отдельности и возможно отвлечься от конкретной природы элементов данных множеств, а рассмотреть множество объектов *G* абстрактной природы, с введенной на ней операцией «*», например, $\forall x, y \; \exists \; Z: x * y = z$. При таком построении абстрактной аксиоматической теории один раз доказанная в ней теорема уже не нуждается в доказательстве в каждой ее конкретной модели [6].

Обращаем внимание, что целесообразность изучения аксиоматического метода в школе не является однозначной. Ряд ученых и методистов убеждены в необходимости его изучения и применения в том или ином случае, в большей или меньшей степени (А. Д. Александров, А. И. Медяник, Л. Ф. Пичурин, Р. Н. Щербаков, В. И Левин и др.) именно по причине того, что этот метод составляет основу построения многих наук [7]. Противники аксиоматического метода указывают на то, что аксиоматическое построение математического материала не требуется на начальных этапах обучения, а скорее является завершающим этапом изучения какого-либо раздела.

Высокая степень абстрактности изучаемого материала, глубокие логические построения просто не доступны большинству учащихся основной и средней общеобразовательной школы, что может привести к формульному заучиваю готовых утверждений и доказательств без понимания сути. Кроме того, на начальном этапе построения аксиоматической теории приходится достаточно сложно и громоздко доказывать весьма очевидные и интуитивные утверждения, например, это проявляется при изучении стереометрии в 10-м классе, что резко снижает мотивацию и интерес школьников к дальнейшему изучению математики [8].

Математическое моделирование выполняет фундаментальную роль в осуществлении интеграции математических знаний на всех уровнях. Сущность данного метода состоит в приближенном описании определенной группы явлений материального мира, выражаемом при помощи математических символов. Этот метод является специальным (частно-методическим) методом обучения математики и в то же время методом решения практических задач [9].

Использованию элементов математического моделирования в школьном образовании посвящено немало исследований (А. Г. Мордкович, В. Я. Виленкин, Л. М Фридман, С. Ф. Горбов, Н. С. Подходова, М. В. Егупова и др.), авторы которых сходятся во мнении, что результатом реализации интегративной функции математического моделирования в процессе обучения является системность знаний, умений и навыков обучающихся на всех уровнях интеграции.

Для однозначности в данной работе будем опираться на результаты М. В. Егуповой, в диссертационном исследовании которой на основе анализа содержания уровней обучения математическому моделированию, представленных Н. Я. Виленкиным, сделан вывод о целесообразности выделения четырех этапов процесса математического моделирования при решении задач в обучении математике в школе:

- математизация (анализ условия);
- формализация (построение математической модели условия);
- внутримодельное решение задачи;
- интерпретация результата [9, с. 100].

М. В. Егупова как наиболее значимые функции математического моделирования выделяет: образовательную, контроля учебной деятельности, интерпретационную и реализацию межпредметных связей [9, с. 198].

Реализация образовательной функции позволяет обеспечить школьникам наилучшее понимание математического курса, а также дать представление о том, как эти знания могут быть применены в реальном мире. Это осуществляется через демонстрацию учащимся универсальности алгебраических и геометрических знаний в применении одинаковых математических моделей к различным объектам действительности.

Например, в двух задачах, представленных ниже, реальные ситуации различны, но их объединяет математическая модель решения данных задач по формуле суммы первых *n* членов арифметической прогрессии:

1) Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 9 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые пять секунд?

2) В амфитеатре 10 рядов. В первом ряду 19 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?

Функция контроля учебной деятельности заключается в оценке уровня овладения школьниками общеучебными и прикладными математическими навыками при решении задач, связанных с применением математики.

Под интерпретационной функцией понимают принцип множественности моделей, то есть представление одного и того же объекта различными моделями в зависимости от целей исследования. Например, математическую функцию можно задать с помощью формулы (аналитически), таблицей, графически или словесным описанием.

Функция реализации межпредметных связей направлена на ознакомление школьников с областями знаний, в которых применим метод математического моделирования, в частности, сюда можно отнести сюжетные задачи с естественнонаучным содержанием [9].

Важно отметить, что для того чтобы учащиеся овладели моделированием как методом научного познания, необходимо, чтобы школьники сами строили модели различных реальных ситуаций, причем как на языке алгебры, так и на языке геометрии.

Очевидно, что с методом математического моделирования тесно связаны специальные алгебраические и геометрические методы обучения математике.

Алгебраический метод как метод элементарной алгебры состоит в определенных правилах преобразования букв и буквенных выражений. Этот метод является способом познавательной деятельности, основанным на системе алгебраических знаний.

Геометрический метод – это метод, основывающийся при обучении на систему геометрических знаний и на наглядные геометрические представления.

В истории математики оба эти метода развивались в тесной взаимосвязи, что должно прослеживаться и в школьном курсе изучения данного предмета, показывая обучающимся неразрывный процесс формирования математических знаний и помогая совершать свои математические «открытия». Под интеграцией алгебраического и геометрического методов будем понимать сочетание или взаимосвязь этих методов, когда ученик самостоятельно или с помощью учителя переводит информацию алгебраическую в геометрическую и наоборот [10, с. 251].

Основным средством, с помощью которого реализуется интеграция алгебраического и геометрического методов, выступает решение математических задач. При этом для формирования представления о единстве математического знания у обучающихся должна быть возможность решения предложенной задачи либо только алгебраическими и только геометрическими средствами, либо каким-то одним методом с использованием некоторых алгебраических или геометрических приемов. Л. М. Фридман выделяет восемь этапов в структуре решения математических задач, при этом четыре из них отмечает как обязательные, а именно анализ задачи, поиск способа ее решения, осуществление решения задачи, формулирование ответа. Часто школьники не могут реализовать указанные этапы, начиная с анализа условия, или начинают выполнять задания по привычному для себя алгоритму, не допуская возможности альтернативного и более рационального способа решения, но другими методами. По мнению Л. М. Фридмана, «если вы не знаете, как решить сложную задачу, целесообразно построить ее модель на другом языке, например, для геометрической задачи построить ее алгебраическую модель» [11, с. 84] и после этого перейти к решению.

Интеграцию алгебраического и геометрического методов можно проиллюстрировать несколькими примерами. Простой и наглядный пример такого сочетания, когда путем несложных геометрических построений можно найти какую-либо заданную величину.

Задача 2. Найти другие тригонометрические функции, если $tg\alpha = 2{,}4$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Наиболее рациональным решением будет начертить прямоугольный треугольник *ABC*, тангенс острого угла которого равен 2,4 (рис. 1). Тогда противолежащий катет *BC* соответственно равен 5, а прилежащий катет *AB* равен 12.

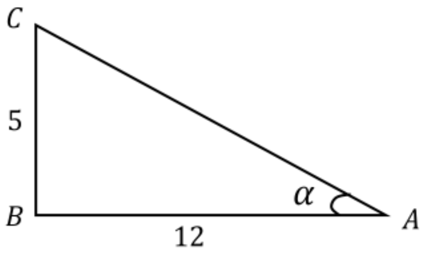

Рис. 1. Чертеж к задаче 2

По теореме Пифагора легко найти, что гипотенуза $AC = 13$, тогда $sinA = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$, $cosA = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$, $ctgA = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$. Учитывая, что по условию задачи угол α находится в третьей координатной четверти, то получим: $sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $ctg\alpha = \frac{5}{12}$.

Задача 3. Найти положительное значение параметра a, при котором система $\begin{cases}(x-y)^2 = a \\ x^2 + y^2 = 2\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2}$. Уравнение $(x-y)^2 = a$ преобразуем следующим образом:

$x - y = \sqrt{a}$ или $x - y = -\sqrt{a}$, тогда $y = x - \sqrt{a}$ или $y = x + \sqrt{a}$. Полученные формулы задают прямые с угловым коэффициентом $k = 1$ и пересечением с Oy в точках $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Выполним рисунок (рис. 2).

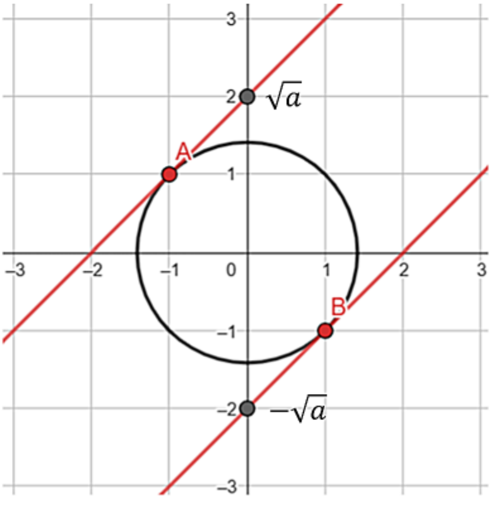

Рис. 2. Чертеж к задаче 3

Из рисунка видно, что система будет иметь два решения в случае касания прямых окружности в точках *A* и *B*. Не трудно понять, что точка *A* имеет координаты (–1;1). Подставим их в соответствующее уравнение и найдем значение параметра a:

$$y = x + \sqrt{a},$$
$$1 = -1 + \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

Аналогичным образом можем подставить координаты точки $B\ (1; -1)$ в уравнение $y = x - \sqrt{a}$. Получим ответ, что система будет иметь ровно два решения при значении параметра $a = 4$.

На наш взгляд, данный пример иллюстрируют органическую связь алгебраического и геометрического методов. В ходе выполнения заданий обучающиеся обязаны владеть навыками элементарных алгебраических преобразований, знать уравнения прямой и окружности, понимать движение графиков функций в зависимости от изменения коэффициентов данных функций, что значительно упрощает решение.

Ведущие содержательно-методические линии школьного курса математики

Ориентир на единство математических знаний как интеграцию различных математических дисциплин определяет отбор содержания математического материала и его структурирование посредством исторически сложившихся ведущих содержательно-методических линий школьного курса математики: функциональной, числовой, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, вероятностно-стохастической и геометрических величин [12].

Интегративная функция в проектировании содержательно-методических линий школьного курса математики рассматривалась в исследованиях В. А. Тестова, В. Ю. Шемякиной, Г. Г. Хамова (реализация числовой линии); Ж. А. Нурмаганбетовой, Л. В. Тихоновой, Н. К. Аширбаевой, С. Ю. Попадьина, О. В. Мишениной (реализация функционально-графической линии); С. О. Ефимовой, В. И. Горбачева, О. В Янущик (реализация линии уравнений и неравенств); В. Г. Потапова, С. В. Щербатых, Е. А. Бунимович, Е. В. Гусевой, О. Н. Троицкой (реализация вероятностно-стохастической линии), С. А. Богомолова, В. Ф. Филатова, Л. А. Минасян, Л. Н. Барановой, Ю. В. Михеева, Л. И. Боженковой (реализация линии геометрических величин) и др. Также в трудах и монографиях В. А. Далингера, А. Г. Мордковича, Ю. М. Колягина, А. Б. Василевского, А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича, В. М. Монахова, Н. М. Рогановского, Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой и др.

Действующий Федеральный государственный общеобразовательный стандарт позволяет урегулировать систему понятий, приемов и методов решения задач, необходимых для усвоения учащимися на базовом и углубленном уровнях внутри каждой содержательно-методической линии [13].

Такой подход можно обосновать следующими аргументами:

- во-первых, это демонстрирует учащимся непрерывное развитие любого из формируемых фундаментальных понятий в курсе математики: число, геометрическая фигура, неравенство, уравнение, преобразование, отношение, множество и т. д.
- во-вторых, систематическое представление информации по каждой методической линии помогает демонстрировать последовательность при формировании знаний, умений и навыков у обучающихся;
- в-третьих, реализуются внутрипредметные связи по содержательным линиям, предусматривается возможность использовать методы одной линии при изучении другой, а также отслеживать влияние изменения последовательности изложения материала на качество обучения.

Это обеспечивает школьникам более устойчивое формирование межпредметных понятий и эффективное оперирование ими [14].

Методическая составляющая урока математики, построенная на основе локального формирования отдельных понятий, выполнение однотипных упражнений с целью добиться усвоения какого-либо одного правила может привести к ряду отрицательных эффектов:

- не обеспечивается сознательность в работе учащихся, развивается в основном репродуктивное мышление;
- нарушается систематичность и последовательность изложения: у школьника создается представление о математике как о наборе не связанных между собой понятий и правил;
- не создается условий для широкой дифференциации упражнений по степени трудности;
- не обеспечивается прочность знаний, так как введенные понятия в последующем не вступают между собой в связи и отношения, не происходит обобщения и систематизации материала, тем самым не решается проблема повторения [15].

Например, понятие функции, в частности линейной функции, обучающимся встречается в начале 7-го класса, а затем школьники изучают степени и тождественные преобразования выражений, практически не встречая при этом ни одного графического упражнения. Таким образом, к моменту изучения квадратичной функции большинство обучающихся не может вспомнить даже определения понятия «функция».

С опорой на исследования В. А. Далингера, Е. И. Смирнова, Т. Н. Гнитецкой, С. Д. Симонженкова, Л. В. Дубовой, Р. Ю. Костюченко, О. А. Яворука и др. в структуре учебной деятельности традиционно выделяется два уровня реализации внутрипредметных связей в школьном курсе математики: содержательный и процессуальный [3; 16; 17].

Содержательный (теоретический) уровень установления внутрипредметных связей при построении математических понятий включает:

- внутрипонятийные связи, то есть отношения между элементами одного понятия, и межпонятийные связи, то есть взаимосвязи между различными математическими понятиями;
- тематические связи, касающиеся связей между большими блоками учебного материала, такими как темы и разделы, а также логические связи внутри конкретной дисциплины;
- локальные связи, которые проявляются при изучении отдельных частей курсов алгебры, геометрии и математического анализа;
- глобальные связи, охватывающие весь учебный материал по математике;
- связи-аналогии, основанные на общих математических моделях различных тематических модулей.
- прямые связи (одно понятие определяется с участием другого) и опосредованные (когда три и более понятий связаны в одну цепочку) [18].

Процессуальный уровень (уровень решения задач) реализации внутрипредметных связей при освоении математического содержания:

- логический, а именно умение правильно совершать логические операции в процессе доказательства математических утверждений, владение такими методами исследования, как анализ, синтез, сравнение, обобщение, классификация и т. д.;
- знаково-символический, то есть знание и умение использовать математическую символику;
- реляционный, то есть умение строить, интерпретировать различные графики, таблицы, диаграммы;

- продуктивный, а именно владение приемами и методами решения задач; знание о путях поиска решения задач, основных методов решения сюжетных задач (арифметический и алгебраический, а также неалгебраические методы решения), приемов и способов осуществления доказательств;
- семантический, то есть составление и интерпретация блок-схем [14].

Заметим, что освоение обучающимися структуры и существенных связей элементов и математических понятий, входящих в какую-либо одну содержательно-методическую линию курса математики, а также понимание сути связи данных понятий с другими разделами курса происходит на финальном этапе реализации вышеназванных уровней [19].

При выборе задач, позволяющих систематизировать знания обучающихся по таким содержательным линиям, как функции, уравнения, неравенства и их системы, вновь обратимся к задачам с параметрами, в процессе решения которых проверяется не степень «заученности» учащимися материала, а его истинное понимание [20, с. 72].

Задача 4. Определить число решений уравнения $|x^2-10x+16|=ax$ при всех $a\geq 0$.

Решение. Пусть $y_1=|x^2-10x+16|$, а $y_2=ax$. Раскроем модуль и получим, что $y_1=\begin{cases}x^2-10x+16, \text{ если } x\leq 2, x\geq 8\\ -x^2+10x-16, \text{ если } 2\leq x\leq 8\end{cases}$.

Так как по условию $a\geq 0$, то графиком функции $y_2=ax$ является прямая, проходящая через начало координат.

Если $a=0$, то функция принимает вид $y=0$, а ее графиком является прямая, которая совпадает с осью абсцисс. Как видно из рис. 3, при $a=0$ заданное уравнение имеет два решения.

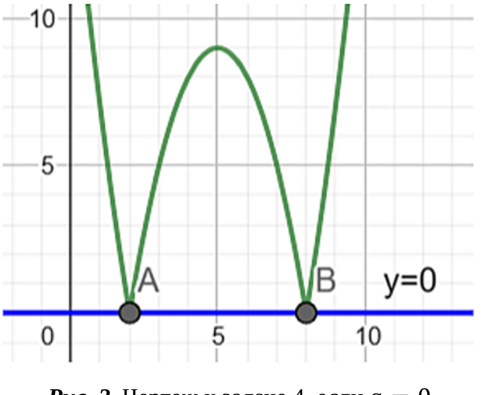

Рис. 3. Чертеж к задаче 4, если $a=0$

Если $a>2$, то очевидно, что уравнение имеет 3 решения в случае касания прямой параболы. До «момента касания» прямая пересекает параболу в четырех точках, соответственно, уравнение имеет четыре решения, а после «момента касания» – в двух, тогда уравнение имеет два решения (рис. 4).

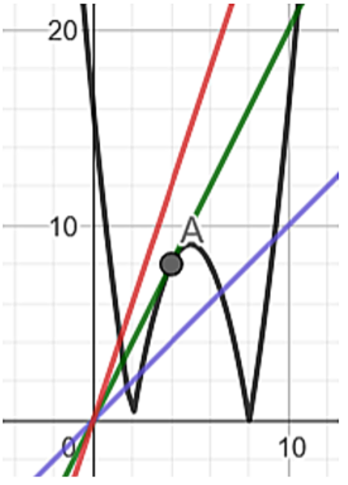

Рис. 4. Чертеж к задаче 4, если $a > 2$

Найдем точку касания.

$$-x^2 + 10x - 16 = ax$$

$$-x^2 + 10x - 16 - ax = 0$$
$$D = (a - 10)^2 - 4 \cdot 16 = a^2 - 20x + 36.$$

Уравнение будет иметь одно решение, в случае если $D = 0$, тогда $a^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 18.$

При $a = 2$ уравнение имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 2x$ и $x = 4$. При $a = 18$ уравнение имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 18x$ и $x = -4$, что не удовлетворяет условию $2 \leq x \leq 8$.

Тогда при $a = 0$ и $a > 2$ уравнение имеет два решения, при $a = 2$ – три решения, при $a \in (0; 2)$ – четыре решения.

Решение данной задачи предполагает, что обучающиеся владеют знаниями о свойствах и построении графиков линейной, квадратичной функций, а также функции модуля. Успешному изучению задач с параметрами в старших классах будет способствовать соответствующая качественная пропедевтика функционального материала, которая ведется в 7–9-х классах и обеспечивает накопление фактов и специфических способов деятельности, на базе которых возможно изучение смежных тем и разделов [21, с. 13].

Математические структуры. Как отмечали А. Н. Колмогоров и другие ведущие ученые, еще одним стержнем преодоления разобщенности различных математических дисциплин, выделения отдельных тем и разделов и обеспечения полноты и единства математического образования являются математические структуры [22].

Математическая структура – это одно или несколько абстрактных множеств M_1, M_2, …, M_k, элементы которого находятся в некоторых отношениях p_1, p_2, …, p_n, причем эти отношения удовлетворяют определенным условиям α_1, α_2, …, α_n, которые рассматриваются как аксиомы данной математической структуры. Примерами математических структур являются: структуры порядка, алгебраические структуры (группы, кольца, поля), топологические структуры, векторные пространства и др. При этом важно отметить, что в формировании у обучающихся понятий о математических структурах выделяются последовательные этапы с опорой на ранее усвоенное, без чего обучение становится формальным [22].

На сегодняшний день при изучении математических структур как средства выстраивания единой системы знаний обучающихся можно выделить диссертационные исследования В. А. Тестова, И. В. Егорченко, И. В. Васильевой, И. В. Кочетовой, А. Н. Колобова и др.

Идея математических структур явно пронизывает все школьное преподавание математики, однако в учебниках этим понятиям не даются четкие определения. Обучающиеся изучают свойства числовых множеств и операции над ними, выполняют операции с многочленами и векторами, знакомятся с геометрическими преобразованиями. Например, в 7-м классе учащиеся изучают кольцо многочленов одной переменной, а в 8-м классе – мультипликативные группы действительных чисел, не содержащих нуля, группы рациональных чисел по операции сложение, поле действительных чисел и т. д., в 9–11-х классах: группы векторов пространства по операции сложение, группы множества различных движений плоскости и т. д. [23], но в учебной литературе понятия групп, колец и полей не определены.

В. А. Тестов приводит пример процесса формирования такой математической структуры, как группа.

Первый этап этого процесса происходит в дошкольном возрасте, когда дети при счете предметов начинают знакомиться с алгебраическими операциями сложения и вычитания. Формирование представления о базовых алгебраических структурах, таких как группы, кольца и поля, продолжается в младшем школьном возрасте, когда школьники расширяют понятие о натуральном числе до множества целых, знакомятся с понятием нуля и противоположными числами, приобретают навыки выполнения алгебраических операций на множестве целых чисел, изучают свойства этих операций.

В более старших классах обучающиеся сталкиваются с задачами, которые помогают им расширить свои знания о математических структурах. При изучении алгебры и геометрии они переходят от работы с конкретными числами к работе с абстрактными буквенными представлениями, которые требуют последующей интерпретации. Теперь алгебраические операции выполняются не только над числовыми множествами, с которыми они знакомы, но и над объектами другой природы, например такими, как многочлены или векторы, что позволяет им понять универсальность некоторых алгебраических операций [22].

Несмотря на существенное влияние изучения математических структур при формировании целостного представления обучающихся о математическом знании, упорядочению и систематизации изучаемого материала, логических связей в рамках одного дидактического модуля и за его пределами, в современных программах школьного курса математики понятия математических структур четко не выделены. Там, где данные понятия используются, это не оговаривается. Это можно объяснить возрастными возможностями обучающихся и достаточно сложным усвоением понятий математических структур. Во многих научных работах предлагается изучать математические структуры во время специально организованных факультативных занятий или при углубленном изучении курса математики.

Таким образом, при изучении проблемы формирования интеграционного компонента понятия единства математических знаний обучающихся выявлено, что установление интеграционных связей между учебными элементами осуществляется на двух уровнях: внутреннем (внутри предмета «математика») и внешнем, или межпредметном (установление интегративных связей между смежными школьными дисциплинами). Решением проблемы интеграции на внутреннем уровне может выступать выбор системообразующего фактора, на основании которого такая интеграция будет осуществляться. К таким основаниям можно отнести: 1) специальные методы обучения математики; 2) ведущие содержательно-методические линии школьного курса математики; 3) математические структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Концепция развития математического образования в Российской федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р).
2. *Юрченко Д. В.* Единство математических знаний обучающихся // Современные проблемы науки и образования. 2023. № 1. URL: https://science-education.ru/article/view?id=32457 (дата обращения: 04.03.2023).
3. *Смирнов Е. И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога: моногр. Ярославль: Канцлер, 2012. 665 с.
4. *Капкаева Л. С.* Системный подход к проблеме интеграции алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании // Интеграция образования. 2004. № 1. С. 169–176.
5. *Маслова С. И.* Роль аксиоматизации в процессе построения математической теории // Вестник ДГТУ. 2007. Т. 7, № 3. С. 71–77.
6. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск.: Высшая школа, 1986. 414 с.
7. *Боташева З. Х.* Стохастическая линия в продуктивном обучении школьной математике // Личность, семья и общество: вопросы педагогики и психологии: сб. ст. по материалам LXVII Междунар. науч.-практ. конф. 2016. № 8. С. 31–41.
8. *Игошин В. И.* Аксиоматический метод в обучении математике и в образовании будущих учителей математики // Известия ВГПУ. 2022. № 1. С. 102–110.
9. *Егупова М. В.* Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе: дис. … д-ра пед. наук. М., 2014. 433 с.
10. *Капкаева Л. С.* Формирование специальных компетенций в математическом образовании будущих педагогов // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы 2-й конф. 2014. С. 249–252.
11. *Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.* Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1984. 182 с.
12. *Шемякина А. Ю.* Проектирование числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы // Математика. Образование. Культура: сб. тр. VIII науч. конф., 26–29 апр. 2017 г. Тольятти, 2017. С. 430–434.
13. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: приказ М-ва просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287.
14. *Орлов В. В., Подходова Н. С., Снегурова В. И.* Особенности построения школьного курса математики в логике образовательных стандартов // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. работ 69-х Герценовских чтений, 19–21 апр. 2016 г. СПб., 2016. С. 3–9.
15. *Токарева Л. И.* Формирование у учащихся математических понятий и их систем в рамках современного урока математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2016. № 18. С. 304–313.
16. *Далингер В. А., Симонженков С. Д.* Реализация внутрипредметных связей при решении математических задач посредством когнитивно-визуальной деятельности: учеб.-метод. пособие. Омск: ОмГПУ, 2013. 195 с.

17. *Гнитецкая Т. Н.* Научно-методические и теоретические аспекты внутрипредметных связей: автореф… дис. канд. пед. наук. Владивосток, 1998. 21 с.
18. *Сторчилов П. А.* Реализация внутрипредметных связей при обучении физике в школе на основе циклической модели построения содержания учебного курса: автореф. дис. … канд. пед наук. Волгоград, 2015. 27 с.
19. *Кононенко Н. В., Токарева Ю. С., Чухрий П. А.* Реализация внутрипредметных связей в рамках содержательно-методических линий школьного курса математики // Самарский научный вестник. 2019. Т. 8, № 3. С. 290–294.
20. *Дяченко С. И.* Линия задач с параметрами в школьном курсе математики // Вестник Таганрогского ин-та им. А. П. Чехова. 2010. № 2. С. 72–77.
21. *Покровский В. П.* Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие. Владимир: ВлГУ, 2014. 143 с.
22. *Тестов В. А.* Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях // Концепт. 2014. № 12. URL: http://e-koncept.ru/2014/14333.htm (дата обращения: 18.12.2022).
23. *Алексеенко А. С., Лихачева М. В.* Об изучении алгебраических структур в школьном курсе математики // Современные инновации. 2017. № 3. С. 24–28.

REFERENCES

1. Kontseptsiya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossiyskoy federatsii (utv. rasporyazheniem Pravitelstva RF ot 24.12.2013 No. 2506-r).
2. Yurchenko D. V. Edinstvo matematicheskikh znaniy obuchayushchikhsya. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*. 2023, No. 1. *Available at:* https://science-education.ru/article/view?id=32457 (accessed: 04.03.2023).
3. Smirnov E. I. *Fundirovanie opyta v professionalnoy podgotovke i innovatsionnoy deyatelnosti pedagoga: monogr.* Yaroslavl: Kantsler, 2012. 665 p.
4. Kapkaeva L. S. Sistemnyy podkhod k probleme integratsii algebraicheskogo i geometricheskogo metodov v srednem matematicheskom obrazovanii. *Integratsiya obrazovaniya.* 2004, No. 1, pp. 169–176.
5. Maslova S. I. Rol aksiomatizatsii v protsesse postroeniya matematicheskoy teorii. *Vestnik DGTU.* 2007, Vol. 7, No. 3, pp. 71–77.
6. Stolyar A. A. *Pedagogika matematiki.* Minsk.: Vysshaya shkola, 1986. 414 p.
7. Botasheva Z. Kh. Stokhasticheskaya liniya v produktivnom obuchenii shkolnoy matematike. In: Lichnost, semya i obshchestvo: voprosy pedagogiki i psikhologii. *Proceedings of the LXVII International scientific-practical conference.* 2016, No. 8, pp. 31–41.
8. Igoshin V. I. Aksiomaticheskiy metod v obuchenii matematike i v obrazovanii budushchikh uchiteley matematiki. *Izvestiya VGPU.* 2022, No. 1, pp. 102–110.
9. Egupova M. V. Metodicheskaya sistema podgotovki uchitelya k praktiko-orientirovannomu obucheniyu matematike v shkole. *ScD dissertation (Education).* Moscow, 2014. 433 p.
10. Kapkaeva L. S. Formirovanie spetsialnykh kompetentsiy v matematicheskom obrazovanii budushchikh pedagogov. In: Aktualnye problemy obucheniya matematike i informatike v shkole i vuze. *Proceedings of the 2rd conference*. 2014. Pp. 249–252.
11. Fridman L. M., Turetskiy E. N. *Kak nauchitsya reshat zadachi.* Moscow: Prosveshchenie, 1984. 182 p.
12. Shemyakina A. Yu. Proektirovanie chislovoy soderzhatelno-metodicheskoy linii v uglublennom kurse matematiki obshcheobrazovatelnoy shkoly. In: Matematika. Obrazovanie. Kultura. *Proceedings of the VIII scientific conference, 26–29 Apr. 2017.* Tolyatti, 2017. Pp. 430–434.
13. Ob utverzhdenii federalnogo gosudarstvennogo obrazovatelnogo standarta osnovnogo obshchego obrazovaniya: prikaz M-va prosveshcheniya RF ot 31 maya 2021 g. No. 287.

14. Orlov V. V., Podkhodova N. S., Snegurova V. I. Osobennosti postroeniya shkolnogo kursa matematiki v logike obrazovatelnykh standartov. In: Problemy teorii i praktiki obucheniya matematike. *Proceedings of the 69th Herzen readings, 19–21 apr. 2016 g.* St. Petersburg, 2016. Pp. 3–9.
15. Tokareva L. I. Formirovanie u uchashchikhsya matematicheskikh ponyatiy i ikh sistem v ramkakh sovremennogo uroka matematiki. *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*. 2016, No. 18, pp. 304–313.
16. Dalinger V. A., Simonzhenkov S. D. *Realizatsiya vnutripredmetnykh svyazey pri reshenii matematicheskikh zadach posredstvom kognitivno-vizualnoy deyatelnosti: textbook.* Omsk: OmGPU, 2013. 195 p.
17. Gnitetskaya T. N. Nauchno-metodicheskie i teoreticheskie aspekty vnutripredmetnykh svyazey. *Extended abstract of PhD dissertation (Education).* Vladivostok, 1998. 21 p.
18. Storchilov P. A. Realizatsiya vnutripredmetnykh svyazey pri obuchenii fizike v shkole na osnove tsiklicheskoy modeli postroeniya soderzhaniya uchebnogo kursa. *Extended abstract of PhD dissertation (Education).* Volgograd, 2015. 27 p.
19. Kononenko N. V., Tokareva Yu. S., Chukhriy P. A. Realizatsiya vnutripredmetnykh svyazey v ramkakh soderzhatelno-metodicheskikh liniy shkolnogo kursa matematiki. *Samarskiy nauchnnyy vestnik.* 2019, Vol. 8, No. 3, pp. 290–294.
20. Dyachenko S. I. Liniya zadach s parametrami v shkolnom kurse matematiki. *Vestnik Taganrogskogo in-ta im. A. P. Chekhova.* 2010, No. 2, pp. 72–77.
21. Pokrovskiy V. P. *Metodika obucheniya matematike: funktsionalnaya soderzhatelno-metodicheskaya liniya: textbook*. Vladimir: VlGU, 2014. 143 p.
22. Testov V. A. Osobennosti formirovaniya u shkolnikov osnovnykh matematicheskikh ponyatiy v sovremennykh usloviyakh. *Kontsept*. 2014, No. 12. *Available at:* http://e-koncept.ru/2014/14333.htm (accessed: 18.12.2022).
23. Alekseenko A. S., Likhacheva M. V. Ob izuchenii algebraicheskikh struktur v shkolnom kurse matematiki. *Sovremennye innovatsii.* 2017, No. 3, pp. 24–28.

Юрченко Дарья Владимировна, учитель математики, ФГКОУ «Пермское президентское кадетское училище им. Героя России Ф. Кузьмина войск национальной гвардии Российской Федерации»

e-mail: yurchenko.dasha@mail.ru

Yurchenko Daria V., Maths Teacher, Perm Presidential Cadet School of the National Guard Troops of the Russian Federation named after the Hero of Russia Fyodor Kuzmin

e-mail: yurchenko.dasha@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.03.2024
The article was received on 10.03.2024