

УДК 372.851
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/1819-463X-2022-1-222-229

ОБ ОШИБКАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИМВОЛОВ ЯЗЫКА ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В ЗАПИСИ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева

Аннотация. В статье проанализированы типичные ошибки, допускаемые студентами в символической записи на языке теории множеств предложений геометрического содержания. Выявлены причины типичных ошибок студентов. Выделены некоторые типы таких ошибок. Приведены примеры заданий, направленных на формирование умения корректно использовать символы языка теории множеств при записи предложений.

Ключевые слова: символы языка теории множеств, символическая запись, предложения геометрического содержания, ошибки студентов, учителя математики.

Для цитирования: Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. Об ошибках использования символов языка теории множеств в записи предложений геометрического содержания // Наука и школа. 2022. № 1. С. 222–229. DOI: 10.31862/1819-463X-2022-1-222-229.

ABOUT THE MISTAKES OF USING SET THEORY LANGUAGE SYMBOLS IN WRITING SENTENCES WITH GEOMETRIC CONTENT

I. L. Timofeeva, I. E. Sergeeva

Abstract. The article analyzes typical students' mistakes made in symbolic writing in set theory language of sentences with geometric content. The causes of typical students' mistakes are revealed. Some types of such mistakes are highlighted. Examples of tasks aimed at forming the ability to correctly use the set theory language symbols are given.

Keywords: set theory language symbols, symbolic writing, sentences with geometric content, students' mistakes, math teachers.

© Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е., 2022



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

1. Актуальность. Символы языка теории множеств широко используются в высшей школе при изучении разных математических дисциплин, в том числе геометрии. Студенты довольно часто допускают ошибки при использовании символов языка теории множеств для записи предложений. Говоря об этом, мы опираемся на собственный многолетний опыт преподавания на математическом факультете института математики и информатики МПГУ дисциплин, при изучении которых используется символическая запись математических предложений разного содержания: Вводный курс математики, Математическая логика и теория алгоритмов (в бакалавриате), Логические основания математики (в магистратуре) и др.

Способность грамотно записывать математические предложения и определения символически является одной из важных составляющих математической грамотности будущего учителя математики. В статьях [1] и [2] большое внимание уделено проблемам формирования способности студентов грамотно использовать логическую символику. В то же время не менее важным является умение грамотно пользоваться символами языка теории множеств для лучшего усвоения строения и смысла математических предложений, особенно предложений геометрического содержания, в связи с теоретико-множественной природой геометрических объектов (при теоретико-множественном подходе).

2. Типы ошибок. Нами проанализированы типичные ошибки, допускаемые студентами при символической записи предложений геометрического содержания. В результате проведенного анализа удалось выявить причины типичных

ошибок студентов и систематизировать эти ошибки.

Можно выделить следующие типы ошибок в записи предложений с использованием символов языка теории множеств:

1) ошибки, связанные с непониманием/неразличением основных понятий теории множеств применительно к геометрическим объектам теоретико-множественной природы (например, понятий «элемент множества» и «подмножество множества»; «одноэлементное множество» и «элемент этого множества»);

2) ошибки, связанные с неразличением понятий «отношение» и «операция», в частности, связанные с путаницей (неразличением) отношений (между прямыми и плоскостями) с созвучными операциями над множествами;

3) ошибки, связанные с неразличением предложений и выражений математического языка, с непониманием сути логической операции отрицания предложений;

4) ошибки, связанные со спецификой некоторых сокращений речи, принятых в геометрии, и отсутствием таких сокращений в теории множеств.

Отметим, что мы не претендуем на полноту приведенного списка типов ошибок при записи на языке теории множеств предложений геометрического содержания – он может быть расширен.

3. Примеры ошибок. Приведем примеры ошибок в символической записи предложений геометрического содержания, иллюстрирующие указанные типы.

Пример 1. Предложение «Прямая a лежит в плоскости α » студенты часто записывают ошибочно так: $a \in \alpha$ (вместо $a \subset \alpha$). Здесь нет аналогии с правильной записью $M \in \alpha$ созвучного предложения

«Точка M лежит в плоскости α ». Причина этой ошибки – в непонимании студентами разницы между понятиями *подмножества* и *элемента* множества (ошибка типа 1). Сбивает использование сказуемого «лежит» в разных смыслах.

Приведем пример, в котором часто допускается указанная ошибка.

Пример 1'. Рассмотрим определение прямой, перпендикулярной плоскости: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости».

Часто это определение студенты ошибочно записывают так:

$$a \perp \alpha \xrightarrow{\text{def}} \forall b \in \alpha (a \perp b). \quad (1)$$

В этой записи допущена ошибка типа 1.

Корректная запись этого определения с ограниченным квантором такова:

$$a \perp \alpha \xrightarrow{\text{def}} \forall b \subset \alpha (a \perp b), \quad (2)$$

а без ограниченного квантора такова:

$$a \perp \alpha \xrightarrow{\text{def}} \forall b (b \subset \alpha \rightarrow a \perp b). \quad (2')$$

Ряд другого рода ошибок связан с записью предложений, в которых речь идет о пересечении прямых (на плоскости или в пространстве) и плоскостей. Причина таких ошибок заключается в непонимании студентами, что *отношение* «пересекаться» на множестве прямых (плоскостей) и *операция* пересечения их как множеств – не одно и то же. Сбивает созвучность этих терминов.

Пример 2. Предложение «Прямые a и b пересекаются» студенты часто записывают так: $a \cap b$. Они не понимают, что выражение $a \cap b$ представляет собой теоретико-множественное пересечение двух множеств – прямых a и b , что пересечение множеств – операция, а не отношение (ошибка типа 2). Выражение $a \cap b$ является символической записью *именной формы* «пересечение прямых a и b », а никак не записью *предложения* «Прямые a и b пересекаются». Использование символической записи

выражения в качестве записи предложения относим к ошибкам типа 3.

Пример 3. С учетом приведенных в предыдущем примере разъяснений студенты предлагают следующую запись предложения «Прямые a и b пересекаются»:

$$a \cap b \neq \emptyset. \quad (3)$$

Однако и здесь опять возникает проблема (относим ее к типу 4). Дело в том, что в ряде известных учебников по геометрии принимаются некоторые сокращения речи. Например, вместо «Две различные прямые a и b » («Различные прямые a и b ») говорят: «Две прямые a и b », подразумевая, что они различные. Аналогичные сокращенные обороты в теории множеств не используются. Когда речь идет о двух произвольных множествах a и b , не исключается возможность их совпадения (равенства). В случае, когда возможность совпадения множеств a и b исключена, то есть множества различны, это обязательно явно говорится и записывается ($a \neq b$). Отметим, что в учебнике по геометрии [3] явно и четко написано: «Здесь и в дальнейшем, говоря “две точки”, “три точки”, “две прямые” и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны» [3, с. 5]. К сожалению, так четко об этом говорят не все. Однако такой договоренности нет и быть не может в теории множеств, и несовпадение множеств всегда должно явно указываться, что и отражено в записи (4).

Поэтому предложение «Прямые a и b пересекаются» символически на языке теории множеств корректно следует записывать так:

$$a \neq b \ \& \ a \cap b \neq \emptyset. \quad (4)$$

Аналогичными являются следующие два примера.

Пример 3'. Предложение «Плоскости α и β пересекаются» студенты часто записывают так: $\alpha \cap \beta$ (ошибка типа 2).

Пример 4'. Предложение «Плоскости α и β пересекаются» студенты часто записывают так (ошибка типа 4):

$$\alpha \cap \beta \neq \emptyset. \quad (5)$$

Предложение «Плоскости α и β пересекаются» символически на языке теории множеств корректно следует записывать так:

$$\alpha \neq \beta \ \& \ \alpha \cap \beta \neq \emptyset. \quad (6)$$

Пример 5. Предложение «Прямые a и b не пересекаются» («Прямые a и b не являются пересекающимися») студенты нередко записывают так: $a \not\cap b$, допуская при этом грубую ошибку, поскольку эта запись не является даже выражением. Действительно, перечеркивание принято связывать с отрицанием предложения. Поэтому перечеркивать можно только символ какого-либо отношения, понимая под этим отрицание соответствующего предложения. Например, принято писать « $a \neq b$ », понимая под этим отрицание предложения « $a = b$ ». Перечеркивать символ операции над множествами нельзя, поскольку логическая операция отрицания – это операция над предложениями, а не над выражениями. Поэтому запись « $a \not\cap b$ » не является ни записью предложения, ни записью выражения. Относим такую ошибку к типу 3.

Пример 6. С учетом приведенных в примере 5 разъяснений студенты предлагают следующую запись предложения «Прямые a и b не пересекаются»:

$$a \cap b = \emptyset. \quad (7)$$

Здесь допущена ошибка типа 4, связанная с отсутствием сокращений в теории множеств, о которых сказано в комментарии к примеру 3.

Корректная символическая запись предложения «Прямые a и b не пересекаются» такова:

$$a = b \vee a \cap b = \emptyset. \quad (8)$$

Аналогичными являются следующие два примера.

Пример 5'. Предложение «Плоскости α и β не пересекаются» студенты часто записывают так: $\alpha \not\cap \beta$ (ошибка типа 3).

Пример 6'. Предложение «Плоскости α и β не пересекаются» некорректно студенты записывают так: $\alpha \cap \beta = \emptyset$ (ошибка типа 4).

Предложение «Плоскости α и β не пересекаются» символически на языке теории множеств корректно следует записывать так:

$$\alpha = \beta \vee \alpha \cap \beta = \emptyset. \quad (9)$$

Пример 7. Предложение «Прямые a и b пересекаются в точке M » нередко записывают так:

$$a \cap b = M. \quad (10)$$

Здесь в левой части равенства – множество $a \cap b$, а в правой – точка, а не множество. Ошибку относим к типу 1.

Корректная запись такова:

$$a \cap b = \{M\}. \quad (11)$$

Пример 8. Предложение «Плоскости α и β пересекаются по прямой l » студенты ошибочно могут записать так: $\alpha \cap \beta = \{l\}$ по аналогии с записью (11) предложения «Прямые a и b пересекаются в точке M ». Однако в этом случае аналогии нет. Ошибка связана с непониманием различия между множествами l и $\{l\}$ (ошибка типа 1).

Правильная символическая запись предложения «Плоскости α и β пересекаются по прямой l » такова:

$$\alpha \cap \beta = l. \quad (12)$$

Здесь в обеих частях равенства – множества, в отличие от записи (10).

4. Примеры заданий. Авторы разработали задания для формирования умения студентов корректно использовать символы языка теории множеств при записи математических предложений [4], которые успешно использовали в течение более 10 лет. Для контроля сформированности этого умения мы разработали задания тестового типа, которые последние два года успешно использовали при онлайн-тестировании студентов в курсах Вводный курс математики, Логические основания математики. Об опыте использования этих заданий во Вводном курсе математики, в частности при онлайн-тестировании, идет речь в наших статьях [5] и [6].

Приведем два примера заданий тестового типа.

Задание 1. Выберите все правильные символические записи предложения «Прямые a и b пересекаются в точке M »:

- 1) $a \cap b = M$;
- 2) $a \cap b = \{M\}$;
- 3) $M \in a \ \& \ M \in b$;
- 4) $M \in a \cap b$;
- 5) $\{M\} \subset a \cap b$;
- 6) $\exists M (a \cap b = \{M\})$.

Правильный вариант: 2.

Задание 2. Выберите все правильные символические записи предложения «Плоскости α и β пересекаются»:

- 1) $\alpha \cap \beta$;
- 2) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$;
- 3) $\alpha \neq \beta \ \& \ \alpha \cap \beta \neq \emptyset$;
- 4) $\alpha \cap \beta = l$;
- 5) $\exists l (\alpha \cap \beta = l)$;
- 6) $\alpha \cap \beta = \{l\}$.

Правильные варианты: 3 и 5.

Опыт использования в обучении специально разработанных заданий подтверждает положительную динамику результативности формирования у студентов умения записывать предложения с помощью символов языка теории множеств [6].

5. Символические записи в учебниках и в Интернете. Проанализировав ряд школьных учебников по геометрии и интернет-ресурсов, мы пришли к следующим выводам.

Во многих рассмотренных нами школьных учебниках по геометрии, входящих в федеральный перечень, теоретико-множественная символика используется, но весьма ограниченно (например, [3; 7–9]), а в некоторых не используется совсем (например, [10–12]). Можем предположить, что авторы считают, что более сложные корректные записи с помощью символов языка теории множеств с трудом будут восприниматься школьниками, поэтому они используют только простые записи или не используют их вовсе. Такая позиция понятна. Важно отметить, что в указанных учебниках, где авторы все-таки используют символы языка теории множеств, они

делают это корректно, что заслуживает уважения.

Исключением являются учебники [8] и [9], в которых неграмотно записывается предложение «Прямые a и b пересекаются в точке M »: $a \cap b = M$. В учебнике [13] кроме неграмотной записи $a \cap b = M$ неоднократно повторяется ошибка в записи предложений «Прямая a лежит/не лежит в плоскости α »: $a \in \alpha$, $a \notin \alpha$.

В результате анализа некоторых интернет-ресурсов можно сделать вывод, что ошибки в них при записи предложений с использованием теоретико-множественных символов допускаются очень часто. Речь идет об ошибках на ресурсе «Математика Онлайн» [14], ресурсах для абитуриентов, на сайтах для подготовки к ЕГЭ по математике [15], во многих презентациях по геометрии на темы «Взаимное расположение прямых в пространстве», «Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве», «Взаимное расположение плоскостей» (например, [16; 17]). В этих интернет-источниках наиболее распространенными являются ошибки типов 1 и 2, указанные в этой статье.

Досадно то, что эти ошибки тиражируются в интернет-ресурсах, часто посещаемых школьниками, студентами, учителями. В связи с этим весьма важным является формирование у будущих учителей математики способности распознавать такие ошибки и разъяснять их сущность.

6. В заключение отметим:

- символическая запись предложений (как с использованием теоретико-множественных символов, так и логических символов) позволяет наглядно и кратко записывать предложения, а главное – способствует более глубокому пониманию их содержания;
- при использовании символов языка теории множеств нельзя *допускать ошибки* и снисходительно относиться к указанным ошибкам учащихся;
- студентов педвузов – будущих учителей математики – необходимо *специально обучать* грамотно использовать

символическую запись предложений как при изучении классических математических дисциплин, так и на курсе, где формирование таких умений является одной из основных задач (как, например, во Вводном курсе математики);

- во многих школьных учебниках по геометрии символы языка теории множеств используются *корректно*, но весьма сдержанно;

- во многих «мелких» изданиях, а также в интернет-источниках *часто встречаются некорректные символические записи*, поэтому студенты педвузов и учителя математики при использовании подобных источников, с одной стороны, должны подходить к ним *критично*, а с другой стороны, должны владеть необходимыми для этого знаниями и умениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. О нормах использования логических символов при записи математических предложений // Математика и математическое образование: сб. тр. IX Междунар. науч. конф. «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 24–26 апреля 2019 г.) / под общ. ред. Р. А. Утеевой. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. С. 62–67.
2. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. О некоторых ошибках в логико-символической записи предложений геометрического содержания // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы V Междунар. заоч. науч. конф., г. Москва, 18–22 декабря 2019 г. [электрон. изд. сетевого распространения] / под ред. М. В. Егуповой, Л. И. Боженковой. М.: МПГУ, 2020. С. 413–419.
3. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 22-е изд. М.: Просвещение, 2013. 255 с.
4. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е., Лукьянова Е. В. Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования. М.: Академия, 2011. 240 с.
5. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. О символической записи на языке теории множеств предложений геометрического содержания // Классическая и современная геометрия: материалы Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Л. С. Атанасяна (Москва, 1–4 ноября 2021 г.) / под ред. А. В. Царева. М.: МПГУ, 2021. С. 147–148.
6. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. Об опыте обучения студентов педвуза записи предложений геометрического содержания с помощью символов языка теории множеств // Геометрические аспекты в преподавании математики в высшей и средней школе: материалы междунар. конф. «Классическая и современная геометрия» (к 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна), г. Москва, 1–4 ноября 2021 г. / под общ. ред. Н. И. Гусевой. М.: МПГУ, 2021. С. 180–186.
7. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. М.: Просвещение, 2014. 255 с.
8. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 10 кл.: учебник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2008. 223 с.
9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10 класс: учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М.: Вентана-Граф, 2019. 206 с.
10. Шарыгин И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10–11 классы: учебник. М.: Дрофа, 2013. 236 с.
11. Погорелов А. В. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни. 13-е изд. М.: Просвещение, 2014. 175 с.

12. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 10–11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). 5-е изд., испр. и доп. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.
13. Башмаков М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студентов учреждений сред. проф. образования. 3-е изд., стер. М.: Академия, 2017. 256 с.
14. Математика Онлайн. URL: <https://mathcourse.ru/course/vzaimnoe-raspologenie-priamih-v-prostranstve-10-klass/> (дата обращения: 30.09.2021).
15. Подготовка к ЕГЭ по математике. Справочные материалы. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. URL: <https://egemaximum.ru/vzaimnoe-raspolozhenie-pryamuyh-i-ploskostey-v-prostranstve/> (дата обращения: 28.11.2021).
16. Чухаева Е. В. Презентация по геометрии на тему «Взаимное расположение прямых в пространстве». URL: <https://urokimatematiki.ru/prezentaciya-po-geometrii-na-temu-vzaimnoe-raspolozhenie-pryamih-v-prostranstve-1609.html> (дата обращения: 28.11.2021).
17. Презентация на тему «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве». URL: <https://bigslide.ru/geometriya/13168-vzaimnoe-raspolozhenie-pryamih-i-ploskostey-v-pros.html> (дата обращения: 28.11.2021).

REFERENCES

1. Timofeeva I. L., Sergeeva I. E. O normakh ispolzovaniya logicheskikh simvolov pri zapisi matematicheskikh predlozheniy. In: Uteeva R. A. (ed.) Matematika i matematicheskoe obrazovanie. *Proceedings of the IX International scientific conference “Matematika. Obrazovanie. Kultura” (Rossiya, g. Tolyatti, 24–26 Apr. 2019 g.)*. Tolyatti: Izd-vo TGU, 2019. Pp. 62–67.
2. Timofeeva I. L., Sergeeva I. E. O nekotorykh oshibkakh v logiko-simvolicheskoy zapisi predlozheniy geometricheskogo sodержaniya. In: Egupova M. V., Bozhenkova L. I. Aktualnye problemy obucheniya matematike i informatike v shkole i vuze. *Proceedings of the V International correspondence scientific conference, Moscow, 18–22 Dec. 2019*. Moscow: MPGU, 2020. pp. 413–419.
3. Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomtsev S. B. et al. *Geometriya. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatel. uchrezhdeniy: bazovyy i profil. urovni*. Moscow: Prosveshchenie, 2013. 255 p.
4. Timofeeva I. L., Sergeeva I. E., Lukyanova E. V. *Vvodnyy kurs matematiki: ucheb. posobie dlya studentov uchrezhdeniy vyssh. ped. prof. obrazovaniya*. Moscow: Akademiya, 2011. 240 p.
5. Timofeeva I. L., Sergeeva I. E. O simvolicheskoy zapisi na yazyke teorii mnozhestv predlozheniy geometricheskogo sodержaniya. In: Tsarev A. V. (ed.) Klassicheskaya i sovremennaya geometriya. *Proceedings of International conference, dedicated 100th anniversary of the birth of L. S. Atanasyan (Moscow, 1–4 Nov. 2021)*. Moscow: MPGU, 2021. Pp. 147–148.
6. Timofeeva I. L., Sergeeva I. E. Ob opyte obucheniya studentov pedvuza zapisi predlozheniy geometricheskogo sodержaniya s pomoshchyu simvolov yazyka teorii mnozhestv. In: Guseva N. I. (ed.) Geometricheskie aspekty v prepodavanii matematiki v vysshey i sredney shkole. *Proceedings of International conference “Klassicheskaya i sovremennaya geometriya” (to the 100th anniversary of the birth of L. S. Atanasyan), Moscow, 1–4 Nov 2021*. Moscow: MPGU, 2021. Pp. 180–186.
7. Aleksandrov A. D., Verner A. L., Ryzhik V. I. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatel. organizatsiy: bazovyy i uglubl. urovni*. Moscow: Prosveshchenie, 2014. 255 p.
8. Potoskuev E. V., Zvavich L. I. *Geometriya. 10 kl.: uchebnik dlya obshcheobrazovatel. uchrezhdeniy s uglubl. i profilnym izucheniem matematiki*. Moscow: Drofa, 2008. 223 p.
9. Merzlyak A. G., Nomirovskiy D. A., Polonskiy V. B., Yakir M. S. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. Bazovyy uroven. 10 klass: uchebnik*. Moscow: Ventana-Graf, 2019. 206 p.
10. Sharygin I. F. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. Bazovyy uroven. 10–11 klassy: uchebnik*. Moscow: Drofa, 2013. 236 p.

11. Pogorelov A. V. *Geometriya. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovatelnykh organizatsiy: bazovyy i profilnyy urovni*. Moscow: Prosveshchenie, 2014. 175 p.
12. Smirnova I. M., Smirnov V. A. *Geometriya. 10–11 klass: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatelnykh uchrezhdeniy (bazovyy i profilnyy urovni)*. Moscow: Mnemozina, 2008. 288 p.
13. Bashmakov M. I. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya: uchebnik dlya studentov uchrezhdeniy sred. prof. obrazovaniya*. Moscow: Akademiya, 2017. 256 p.
14. Matematika Onlayn. Available at: <https://mathcourse.ru/course/vzaimnoe-raspologenie-priamih-v-prostranstve-10-klass/> (accessed: 30.09.2021).
15. Podgotovka k EGE po matematike. Spravochnye materialy. Vzaimnoe raspologenie pryamykh i ploskostey v prostranstve. Available at: <https://egemaximum.ru/vzaimnoe-raspologenie-pryamih-i-ploskostey-v-prostranstve/> (accessed: 28.11.2021).
16. Chukhaeva E. V. Prezentatsiya po geometrii na temu “Vzaimnoe raspologenie pryamykh i ploskostey v prostranstve”. Available at: <https://urokimatematiki.ru/prezentatsiya-po-geometrii-na-temu-vzaimnoe-raspologenie-pryamih-v-prostranstve-1609.html> (accessed: 28.11.2021).
17. Prezentatsiya na temu “Vzaimnoe raspologenie pryamykh i ploskostey v prostranstve”. Available at: <https://bigslide.ru/geometriya/13168-vzaimnoe-raspologenie-pryamih-i-ploskostey-v-pros.html> (accessed: 28.11.2021).

Тимофеева Ирина Леонидовна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

E-mail: iltimofeeva@mail.ru

Timofeeva Irina L., ScD in Education, Full Professor, Professor, Mathematical Analysis Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

E-mail: iltimofeeva@mail.ru

Сергеева Ирина Евгеньевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, Институт математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

E-mail: iriskaser@mail.ru

Sergeeva Irina E., PhD in Education, Associate Professor, Mathematical Analysis Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

E-mail: iriskaser@mail.ru

Статья поступила в редакцию 05.12.2021

The article was received on 05.12.2021