УДК 373.5, 378.1
ББК 74.26, 74.48

DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226

О МЕСТЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ

А. Н. Ветохин, Е. И. Деза

Аннотация. *В статье рассмотрен ряд практических проблем, возникающих при обучении школьников в рамках стохастической содержательной линии. Проанализировано содержательное наполнение банка заданий по теории вероятностей, предлагаемых для подготовки обучающихся к итоговой аттестации. Выделены трудности, возникающие у школьников в ходе решения теоретико-вероятностных задач. Отмечены задачи, целесообразность использования которых в образовательном процессе очевидна. Приведены примеры задач, формулировки которых нуждаются в корректировке. Сформулированы вопросы, отражающие суть обсуждаемых проблем: какие задачи по теории вероятностей нужны школьникам (чему учить); какие учебники следует использовать при обучении школьников теории вероятностей (на базе чего учить); как готовить учителя к обучению школьников теории вероятностей (кому учить)? Предложены подходы, обеспечивающие частичное решение выделенных проблем.*

Ключевые слова: *теория вероятностей, школьные теоретико-вероятностные задачи, Математическая вертикаль, методика преподавания теории вероятностей, учебник по теории вероятностей.*

Для цитирования: *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.

ON THE PLACE OF PROBABILISTIC PROBLEMS IN THE MATHEMATICAL TRAINING OF SCHOOLCHILDREN

A. N. Vetokhin, E. I. Deza

Abstract. *In the article a number of practical problems that arise when teaching schoolchildren within the framework of the stochastic content line are considered. The* *content of the bank of tasks on the probability theory proposed to prepare schoolchildren to the final certification is analyzed. The difficulties arising among schoolchildren in the course of solving of probabilistic problems are highlighted. The tasks, the feasibility of using which in the educational process is obvious, are noted. Examples of tasks the formulations of which need to be adjusted are given. Questions that reflect the essence of the problems discussed are formulated: what problems in probability theory schoolchildren need (what to teach); which textbooks should be used to teach schoolchildren probability theory (on the basis of what to teach); how to prepare a teacher to teach schoolchildren probability theory (who to teach)? Approaches that provide a partial solution to the identified problems are proposed.*

Keywords: *probability theory, school probabilistic problems, mathematical vertical, methodology of teaching probability theory, textbook on probability theory.*

Cite as: Vetokhin A. N., Deza E. I. On the place of probabilistic problems in the mathematical training of schoolchildren. *Nauka i shkola*. 2023, No. 2, pp. 214–226. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.

Введение. Постановка проблемы

Образовательная система Российской Федерации все еще находится в состоянии модернизации. Пройдя период глобального дистанционного обучения, успев как оценить его плюсы, так и столкнуться с минусами, мы оказались перед лицом обсуждения перспектив возврата к системе специалитета в высшем образовании, которую ломали на наших глазах тридцать лет назад.

Возможно, вскоре встанет вопрос и об отмене системы ОГЭ и ЕГЭ, как не отвечающей отечественным образовательным принципам. Впрочем, пока все в силе, и обсуждения касаются лишь структуры и содержания итоговой аттестации школьников. Так, изменения 2022 г. в структуре ЕГЭ по математике вызвали много вопросов у учителей, преподавателей вузов, репетиторов, готовящих выпускников к профильному экзамену. Прежде всего, это коснулось стохастической составляющей итоговых испытаний. Две задачи (в 2023 г. – третья и четвертая, профильный уровень) по теории вероятности есть две задачи, и как к ним готовить – понятно не всем. Хочется выделить несколько вопросов и авторам данного исследования.

Обладая многолетним опытом преподавания теории вероятностей, мы периодически сталкиваемся с проблемами при объяснении своим ученикам алгоритмов решения некоторых теоретико-вероятностных задач, рассматриваемых сегодня в курсе школьной математики [1].

Как правило, проблемы возникают в связи с тем, что мы стараемся показать обучающимся, как проводить анализ предложенной в задаче ситуации, грамотно выбирать используемую для решения модель, сознательно использовать имеющиеся у них знания, в том числе и в ситуациях, приближенных к реальным. И возникает вопрос: можно ли научить всех школьников делать это действительно осознанно, если мы, профессионалы, имеющие неплохую теоретическую базу в указанной области, зачастую испытываем затруднения в поиске элементарного, «школьного» решения? И нужны ли такие задачи? Возможно, следует ограничиться простейшими задачами-иллюстрациями, направленными на качественное усвоение понятия вероятности?

Следующий вопрос. Мы, воспитанные на классических, проверенных временем учебниках, привыкли к подходу «если непонятно, открой книгу и прочитай».

Но – какую книгу? Как правило, в хорошей книге можно найти и примеры решения задач, во всем их многообразии, и список задач для самостоятельного решения, и соответствующую этим задачам теоретическую базу. Проанализировав предлагаемую сегодня в этой области литературу, мы можем утверждать, что найти учебное пособие, отвечающее указанным выше требованиям, нам не удалось. Наиболее используемые в настоящее время пособия [2; 3] написаны профессионалами, содержат много полезных материалов, но на все возникающие вопросы, к сожалению, не отвечают.

Конечно, Интернет выручает. Вбиваешь текст задачи и, как правило, находишь решение если не конкретной задачи, то ее аналога. Ну а уж если модель есть, то использовать ее в разных условиях труда не составит. Но такой метод не оптимален; хотелось бы иметь на руках более весомое средство обучения.

Наконец, последний вопрос. Кто учит школьников теории вероятностей сегодня; кто будет учить их в обозримом будущем? Студентов-математиков, будущих учителей, теории вероятностей и математической статистке учим мы. Но учим по классическим вузовским учебникам, опираясь на серьезную теоретическую базу. А как быть с элементарным, «школьным» подходом? Кто научит ему будущего педагога или учителя со стажем, не имеющего соответствующего опыта? И как затем, в случае необходимости, учитель будет повышать свою квалификацию в этой области самостоятельно?

Тем не менее, оставим пока открытыми вопросы:

- *Зачем учить школьников сложным «тервер-задачам»?*
- *По каким учебникам учить?*
- *Кому учить?*

– и перейдем к анализу предлагаемых сегодня заданий по теории вероятностей и рассмотрению примеров конкретных проблем, возникающих при решении отдельных задач. (При анализе мы опирались на материалы проекта «Математическая вертикаль», на материалы ОГЭ и ЕГЭ прошлых лет, на демоверсии ОГЭ и ЕГЭ по математике 2023 г., на открытый банк заданий Федерального института педагогических измерений (ОБЗ ФИПИ) этого года ОГЭ и ЕГЭ по математике (базовый и профильный уровни) [4; 5].)

Задачи «без вопросов»

Рассмотрим сначала задачи, которые не вызывают у нас никаких вопросов.

1. Простейшая из них – классическая задача «про пирожки» (см., например, демонстрационный вариант ОГЭ 2022 г.). Приведем еще одну формулировку аналогичного задания.

- *«В фирме такси свободно 16 машин: 3 черных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову заказчика случайным образом выехала одна из машин. Найдите вероятность того, что к нему приедет зеленое такси»* (ОБЗ ФИПИ для ОГЭ, осень 2022 г.).

Для получения правильного ответа $0{,}25 = \frac{4}{16}$ школьнику достаточно использовать элементарные навыки вероятностных рассуждений.

Задач такого рода, связанных с выбором пирожков, ручек, машин, чашек, выученных и невыученных экзаменационных билетов много. Они составляют основу заданий по теории вероятностей ОБЗ ФИПИ для ОГЭ, но встречаются и в ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, базовый и профильный уровни, и в вариантах ОГЭ и ЕГЭ прошлых лет, и в материалах Математической вертикали.

Как простейшие упражнения по отработке навыков вероятностных рассуждений задачи такого рода очень полезны. Однако отметим один – зато существенный – минус. Где-то на пятой задаче обучающийся перестает думать и строит ответ почти бессознательно, выхватывая взглядом нужные данные и автоматически подставляя в числитель и знаменатель уже сформировавшейся в подсознании виртуальной дроби конкретные числа. В задаче про пирожки знаменатель хотя бы нужно сначала получить. А вот в задаче про машины он представлен в явном виде. Не этот ли автоматизм связан с натаскиванием?

С точки зрения сделанного замечания более интересна задача такого плана.

- *«В киоске продается 112 ручек: 17 красных, 44 зеленых, 29 фиолетовых, остальные синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом киоске ручка будет красной или черной»* (ОБЗ ФИПИ для ОГЭ, осень 2022 г.).

Хотя бы потому, что приходится немного подумать, реализовать простейшие вычисления. И только потом строить ту самую виртуальную дробь, но уже на более осмысленном уровне.

На наш взгляд, очень хороши задачи в такой формулировке.

- *«Из каждых 100 ручек, продающихся в киоске, в среднем 2 неисправны. Какова вероятность того, что случайно купленная в киоске ручка окажется исправной?»* (Демонстрационный вариант ЕГЭ, базовый уровень, 2021 г.).

Практически ничем не отличаясь от «пирожковых», эти задачи приближают нас к статистическому определению вероятности, что в современных реалиях не менее важно, чем классический подход.

Достойно смотрятся и задачи непосредственно «на вероятность».

- *«Вероятность того, что новая ручка не пишет, равна 0,19. Найдите вероятность того, что случайно выбранная покупателем ручка пишет хорошо»* (ОБЗ ФИПИ для ОГЭ, осень 2022 г.).

При решении таких задач мы отрабатываем простейшие приемы вероятностных рассуждений, учимся оценивать ситуацию на качественном уровне, анализировать с этой точки зрения возможные ответы: «Если вероятность того, что наугад выбранная ручка пишет плохо, мала, то вероятность того, что наугад выбранная ручка пишет хорошо, велика». Впрочем, эта задача грешит тем же существенным недостатком: примерно после пяти решенных задач никакого анализа ситуации ожидать уже не приходится, идет полуавтоматическая подстановка данных (величины *p*) в формулу *1 – p*.

Собственно, этими классами задач ограничивается представленный осенью 2022 г. на сайте ФИПИ ОБЗ ОГЭ, математика, теория вероятностей [4]. Эти же задачи присутствуют и в материалах ЕГЭ [5]. Следует заметить, что в 11-м классе (тем более на уровне профильного ЕГЭ) можно было бы не повторять такие задачи дословно, а несколько их видоизменить, немного усилив вычислительный аспект. В этом плане нам нравится, наряду с приведенной выше задачей про ручки, следующая формулировка.

- *«Научная конференция длится 3 дня. Всего запланировано 50 докладов: в первый день – 26 докладов, остальные доклады распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что доклад профессора К. состоится во второй день?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, базовый уровень, осень 2022 г.)

Прежде чем конструировать ответ, ученик должен все же кое-что посчитать.

Особенно хороша с этой точки зрения задача про жеребьевку. Простейшая по своей природе, она допускает множество вариантов возможных вопросов и, следовательно, заставляет учащихся думать при построении решения.

- *«Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начнет игру Петя; что начнет игру мальчик; что начнет игру не Света»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, базовый и профильный уровни, осень 2022 г.).

К интересным с методической точки зрения заданиям относятся две задачи, которые в ОБЗ представлены «точечно», то есть не растиражированы, как большинство других.

- *«Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится на 33?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, базовый уровень, осень 2022 г.)

Нам эта задача очень нравится. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчет, который должен провести сам обучающийся. Обычно школьники делают ошибку, вычисляя количество трехзначных чисел по формуле 999 – 100 = 899; правильный подсчет имеет вид 999 – 100 + 1. Еще лучше – воспользоваться правилом умножения, что дает 9 · 10 · 10 = 900 вариантов. Количество натуральных чисел, которые не превосходят 999 и делятся на 33, находим, взяв целую часть числа 999/33 : [999 : 33] = 30. Аналогично находим количество натуральных чисел, не превосходящих 99 и кратных 33 : [99 : 33] = 3. Следовательно, число кратных 33 трехзначных чисел равно 30 – 3 = 27, что дает окончательный результат 27 / 900 = 0,03.

- *«Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом остановились. Какова вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.)

Эта задача хороша тем, что, с одной стороны, отступает от уже заезженных моделей и, с другой стороны, выводит нас на понятие геометрической вероятности. Ответ «одна вторая» очевиден. Красиво. И можно строить различные варианты вопросов.

Наконец, следует отметить достаточно часто встречающуюся в заданиях ЕГЭ задачу про кратное бросание монеты или кубика.

- *«Симметричную монету бросили три раза. Какова вероятность событий “решка выпала три раза”; “орел не выпал ни разу”?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.)

Эта модель сложнее, но она очень подробно разобрана в пособиях, и школьники эту модель хорошо понимают и прочно усваивают. (Еще раз к вопросу о хорошем пособии: его наличие могло бы значительно упростить проблему подготовки школьников по теории вероятностей.)

2. Обсуждая предыдущую задачу, мы естественным образом перешли к обзору заданий ЕГЭ профильного уровня. Остановимся на них более подробно. Прежде всего, следует отметить вероятностные задачи, связанные с использованием алгебры случайных независимых событий.

- *«Стрелок стреляет по одному разу в каждую из трех мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадет в первую мишень и не попадет в две последние»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.).

Выделяя независимые события A_i – «стрелок попал в i-ю мишень» ($i = 1,2,3$), $P(A_i) = 0,9$, мы сначала находим вероятности событий $\bar{A}_i$ по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, а затем получаем ответ по формуле $P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) =$ $= 0,9 \cdot (0,1)^2 = 0,009$. Все достаточно прозрачно, но требует от школьника понимания базовых понятий теории вероятности и навыков работы со случайными событиями. А вот такая ситуация еще более интересна [5].

- *«Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит ее. При каждом отдельном выстреле он попадает в цель с вероятностью 0,5. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.).

Подход тот же. Однако от школьника требуется умение грамотно проанализировать модель, разобраться, какие данные получить, выяснить, как их оценить и на каком этапе остановиться. Надо думать и рассуждать, что очень важно. Задача была бы еще полезнее, если бы вероятность попадания отличалась от вероятности промаха.

Упомянем и задачу «про лампочки».

- *«Автоматический конвейер производит лампочки. Вероятность того, что готовая лампочка неисправна, равна 0,01. Каждая лампочка проходит контроль качества. Вероятность того, что при контроле забракуют неисправную лампочку, равна 0,96. Вероятность того, что при контроле забракуют исправную лампочку, равна 0,06. Какова вероятность того, что случайно выбранная лампочка будет забракована при контроле?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.)

Данная задача хороша тем, что легко позволяет перейти к графу эксперимента. Графический подход – работа с деревом вариантов – эффективный метод анализа вероятностных моделей, и навык его использования – полезный навык обучающегося.

Хороши и задачи, в которых школьник имеют возможность осознать, как «устроена» вероятность.

- *«Вероятность того, что на экзамене по математике Петя верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что Петя верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что Петя верно решит ровно 9 задач»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.).

Рассуждения простейшие. Если учащийся верно решил больше восьми задач, то он решил или 9 задач, или больше девяти. События *B «верно решит больше 9 задач» и C «верно решит ровно 9 задач»* несовместны. Таким образом, вероятность *P(D)* события *D «верно решит больше 8 задач»* равна сумме вероятностей событий *B* и *C,* откуда *P(C) = P(D) – P(B) = 0,75 – 0,63 = 0,12*.

Конечно, если решить десяток задач такого плана, то взгляд «замыливается» и вычисления переходят на полуавтоматический уровень. Но сначала задачи нужно решить. А это полезно в любом случае.

Вопросы и размышления

Рассмотрев задачи, которые не вызывают у нас вопросов, поговорим о ситуациях, когда вопросы так или иначе возникают.

1. Сначала скажем несколько слов о простых задачах, которые, тем не менее, могут вызвать затруднения обучающихся в силу их формулировок. Сравним две задачи из ЕГЭ.

- *«В соревнованиях по легкой атлетике участвуют 25 спортсменов: 7 из России, 2 из Франции и 16 из Кореи. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из России»* (Демонстрационный вариант ЕГЭ, базовый уровень, 2021 г.).

С точки зрения классического подхода элементарным исходом является порядок, который определяется жребием. Поэтому правильное решение – найти число 25! всех перестановок из 25 элементов, а затем вычислить число 7 · 24! всех перестановок из 25 элементов с занятым российским спортсменом первым местом. Однако для задачи базового уровня такое решение кажется перегруженным. В образцах решений, найденных нами в Интернете (к сожалению, ни в одном учебнике мы решения подобной задачи не нашли), все значительно проще. Дробь 7/25, фигурирующая в качестве ответа, строится, исходя их соображений «общее число случаев 25, число благоприятных случаев 7», которые детальнее не обосновываются. Видимо, авторы считают, что элементарным исходом может служить «занятие» кем-то первого места для выступления по итогам той же жеребьевки; остальные места, со второго по 25-е, их просто не интересуют. Можно обсуждать легитимность такого подхода к решению задачи; в любом случае, если авторы демонстрационных заданий подразумевали именно такую схему решения, то выбрали крайне неудачную формулировку.

Рассмотрим еще одну задачу.

- *«В туристической группе 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые пойдут в магазин. Найдите вероятность того, что Иван, член группы, пойдет в магазин?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, базовый уровень, осень 2022 г.)

Как решать такую задачу? Очень хочется использовать комбинаторный подход. В этом случае вероятность «строится» как дробь, в знаменателе которой стоит $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2}$, а в числителе $C_7^1 = 7$, что дает 7 · 2 / 8 · 7 = 2/8 = 0,25. Как и ранее, понимая, что речь идет о базовом уровне ЕГЭ, мы пытаемся найти образец решения подобной задачи, и в Интернете (не в учебнике!) находим ответ 2/8 = 0,25 со стандартным «обоснованием»: общее число случаев 8, число благоприятных случаев 2. Откуда? Пытаемся построить свою модель. Например, такую: поскольку бросается жребий, то имеется 8 листочков, на 6 из которых стоит знак «–», а на 2 – знак «+». Иван выбирает один из 8 листочков. Всего у него 8 возможностей выбора, в то время как благоприятных – два. Итак, ответ действительно равен 2/8 = 0,25. Но насколько легитимна такая «облегченная» версия решения?

Мы считаем, что в случае указанной выше формулировки задачи для ее решения следует использовать комбинаторный подход. Для обоснования своей позиции мы хотели бы сослаться на А. Н. Колмогорова. А именно обсудить решение задачи про жеребьевку среди пяти друзей, представленное в книге [6]. В этой задаче пять человек тянут жребий, выясняя, кому из них идти в магазин. Следует ответить на вопрос, у кого из друзей (первого, тянущего жребий, второго, тянущего жребий и т. д.) вероятность вытянуть талон будет наименьшей. Ответ: соответствующая вероятность не зависит от того, каким по порядку тянет жребий тот или иной участник эксперимента. Для нас важно, что при решении используется классический комбинаторный подход. «*Исходом здесь следует назвать любую из 5! перестановок 5 (талонов, на одном из которых стоит знак “+”)»* [6]. Благоприятными для события «талон “+” достанется *k*-му человеку, тянущему жребий» являются исходы, в которых талон «+» вытаскивается -м по счету, а остальные четыре талона могут появляться на любом по счету месте; это может произойти 4! способами. Следовательно, искомая вероятность равна 4!/5! = 1/5 [6].

Таким образом, даже задачи базового уровня при вариациях в формулировках могут вызвать трудности у школьников, у студентов и даже у преподавателей. Для использования «облегченных» моделей нужно, во-первых, правильно формулировать задания, убирая из условия дополнительные данные, не требующиеся для ответа на поставленный в задании вопрос. Во-вторых, нужно научить обучающихся (и школьников, и студентов) работать с указанными моделями. А чтобы научиться, нужно получить соответствующий опыт. Это как раз тот случай, когда в учебнике примеров решения таких задач не найти. Очень жаль. Без образцов, на которые можно ориентироваться, без накопления опыта решения задач разного типа полноценное освоение теории вероятностей невозможно.

2. Рассмотрим теперь ряд задач профильного уровня. Например, такую.

- *«В классе 21 ученик, среди них – Ваня и Петя. Класс случайным образом* *делят на три группы по 7 человек. Какова вероятность того, что Ваня и Петя окажутся в разных группах?»* (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.)

Авторы, приученные к классической схеме работы, при решении задачи начинают с разбиения 21 человека на три группы. Общее число элементарных исходов – число перестановок с повторениями $P_{(7,7,7)}$ (или, что то же, $C_{21}^{7}C_{14}^{7}$). Число благоприятных исходов равно $A_3^2P_{(6,6,7)}$ (или, что то же, $A_3^2\,C_{19}^{6}\,A_{13}^{6}$; выбираем две группы из трех, в первую помещаем Ваню, во вторую – Петю, затем распределяем остальных школьников). Ответ 0,7 получаем путем несложных вычислений.

В Математической вертикали можно найти похожую задачу «об автобусах».

- *«В туристической группе 21 человек, в том числе Иван и Петр. Группу делят на три подгруппы по 7 человек для посадки в три автобуса. Найдите вероятность событий «Иван и Петр окажутся в одном автобусе»; «Иван и Петр окажутся в разных автобусах». Какова вероятность того, что Петр окажется в автобусе № 1, если известно, что Иван оказался в автобусе № 3?»*

С точки зрения классического подхода элементарными исходами являются в данном случае распределения 21 человека по 21 месту, то есть перестановки из 21 элемента, а благоприятными исходами – некоторые из этих перестановок. Для двух человек в одной группе количество благоприятных исходов 21 · 6 · 19!, что дает ответ 21 · 6 · 19! = 6/20 = 0,3. Для двух человек в разных группах количество благоприятных исходов 21 · 14 · 19!, что дает ответ 21 · 14 · 19!/21! = 7/10. Для ответа на третий вопрос замечаем, что общее число исходов, при которых Иван окажется в автобусе № 3, равно 7 · 20!, в то время как количество благоприятных исходов равно 7 · 7 · 19!, что дает ответ 7/20. Можно вернуться к этой задаче, когда школьникам будет рассказана условная вероятность.

В поисках альтернативных подходов находим в Интернете (вновь не в учебнике) такое решение: Ивана сажаем куда-нибудь, затем к нему в автобус «подсаживаем» Петра с вероятностью 6/20 (6 – число свободных мест в автобусе, где уже находится Иван, 20 – число оставшихся свободных во всех автобусах). Очень просто. Однако – несколько нюансов. Во-первых, представленное решение – это решение с использованием понятия условной вероятности, $P(AB) = P(A)P_A(B)$. Поэтому рассказывать его можно лишь после разговора об условной вероятности. Во-вторых, такой подход вновь не учитывает структуру задачи, вырывая из контекста лишь часть общей модели. В-третьих, дети не понимают, что посадить Ивана куда-нибудь мы можем и должны с вероятностью 1. Наконец, нужно еще понять, что места в автобусе, хотя и не нумерованные, все разные. Вот когда у нас на 21 ученого три дня конференции по семь докладов в каждый, и мы считаем вероятность того, что Иван Иванович с Петром Никифоровичем выступят в один день – там вопросов нет. Расписание априори подтверждает «несовпадение» места (точнее, времени) докладов. (Формулировки с докладами на конференциях в разных вариантах часто встречаются в примерах задач, предлагаемых на ЕГЭ, одна из них была представлена выше.)

Тем не менее, все проанализированные задачи с вероятностной точки зрения неплохие: они не очень просты по сравнению с пирожками, и их формулировки, в большинстве своем, нормальные.

3. Перейдем к практике решения задач, существенно более содержательных.

Уже в ходе освоения проверочных работ 7–8-го класса проекта «Математическая вертикаль» оказалось, что они часто апеллируют к известным формулам, не изучаемым в школе. Например, к *формуле Байеса*. Рассмотрим такую задачу.

- *«В магазине продаются простокваша и ряженка одной фирмы в пакетах по 0,5 литра. Ровно 60% всех пакетов простокваши и ряженки делают на заводе Б, а оставшиеся – на заводе А. В продукции завода А на каждые 7 пакетов простокваши приходится 3 пакета ряженки. На заводе Б на каждый пакет простокваши приходится 4 пакета ряженки. Иван купил пакет ряженки данной фирмы. Какова вероятность того, что этот пакет выпущен на заводе Б?»* (Математическая вертикаль, ТВиСт, 8 класс, 4 марта 2021 г.)

Решая такую задачу со студентами, мы, в классическом курсе теории вероятностей, используем стандартную формулу. А как решать эту задачу в школе? Построим следующую иллюстрацию [1]. «Пусть имеется 100 пакетов молочной продукции. Тогда 40 из них произведено на первом (А), и 60 – на втором (Б) заводах. Из 40 пакетов первого завода 28 – с простоквашей, а 12 – с ряженкой. Из 60 пакетов второго завода 48 – с ряженкой и 12 – с простоквашей. Следовательно, мы имеем 60 пакетов с ряженкой, из них 12 – первого завода, и 48 – второго. Иван уже купил ряженку, то есть выбрал одну из 60 бутылок. Вероятность, что она произведена вторым заводом, равна 48/60, или 0,8. Формальное решение можно построить так. Доля первого завода в производстве молочной продукции фирмы равна 0,4, в то время как доля второго завода равна 0,6. Доля ряженки в продукции первого завода равна $\frac{3}{7+3}$ = 0,3, в то время как доля ряженки в продукции второго завода равна $\frac{4}{1+4}$ = 0,8. Таким образом, доля ряженки в продукции фирмы составляет 0,4 · 0,3 + + 0,6 · 0,8 = 0,6, причем 0,48 продукции выпускает второй завод. Если Иван выбрал пакет ряженки, то вероятность того, что этот пакет выпущена на втором заводе, равна $\frac{0,48}{0,6}$ Полноценное решение может быть получено и при использовании дерева случайного эксперимента». (См. [1].)

Два вопроса. Первый: нужны ли такие задачи в школе? Второй: показывают ли студентам такой способ? Если нет, то как они научат школьников?

Еще одна задача, на этот раз связанная с зависимыми событиями (напоминаем, речь идет о 8-м классе).

- *«В магазине работают два продавца. Вероятность того, что каждый отдельный продавец в случайный момент времени занят, равна 0,6. Вероятность того, что оба продавца заняты, равна 0,5. Какова вероятность событий “оба продавца одновременно свободны”; “свободен ровно один из продавцов”?»* (Математическая вертикаль, Итоговая диагностическая работа «Теория вероятностей и статистика» за 8-й класс, 20 октября 2020 г.)

То, что события *A* «*занят первый продавец*» и *B* «*занят второй продавец*» зависимы, проверить нетрудно. Достаточно убедиться, что вероятность произведения *AB* событий *A* и *B* (0,5) не равна произведению вероятностей (0,36). А вот что делать дальше?

Простейший подход: использовать формулу для суммы вероятностей, (которая легко объясняется при использовании диаграмм), и переход к противоположному событию. Тогда для ответа на первый вопрос используем формулу $1 – P(A + B) = 1 – (0,6 + 0,6 – 0,5) = 0,3$, в то время как для ответа на второй – формулу 0,6 + 0,6 – 2 · 0,5 = 0,2.

Если обучающиеся хорошо усвоили использование диаграмм, прекрасно. А если еще нет?

Не стоит думать, что задачи такого плана встречаются только в Математической вертикали. Ниже – задача «про кофе» из ОБЗ ФИПИ.

- *«В магазине два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна*

0,1. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Какова вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах?» (ОБЗ ФИПИ для ЕГЭ, профильный уровень, осень 2022 г.)

При использовании подходов, представленных выше, задача решается достаточно прозрачно, но где все эти (или другие?) подходы к решению можно посмотреть? В книгах [1; 2] материалов совсем мало, и подходы представлены лишь классические. В сборниках задач (например, [7]) представлены лишь задачи и (в лучшем случае) ответы. А чтобы решать задачи, нужны задачи. И образцы их решения. То есть – хороший грамотный учебник, написанный квалифицированными людьми. Мы все время возвращаемся к данной проблеме.

Рассмотрим еще один тип задач.

- *«В зоомагазине продаются рыбки пяти пород. Маша решила купить трех рыбок. Сколькими способами она может выбрать трех рыбок так, что: все рыбки будут разных пород; рыбки будут только двух пород?»* (Математическая вертикаль, Итоговая диагностическая работа, 8 класс, 20 октября 2020 г.)

В данном случае мы выбираем не столько рыбок, сколько их породу. Из пяти пород три различных можно выбрать 10 способами (число сочетаний из 5 по 3). Если используем только две породы, то в нашем случае обязательно купим двух рыбок одной породы, и одну – другой. Поэтому ответ 20 получается как число 20 = 5 · 4 размещений из 5 по 2 (купим двух рыбок первой породы и одну второй). Или, что то же, как число 2 · 10 (выбираем две породы без учета порядка, 10 вариантов, и умножаем на 2 – число возможностей выбрать породу, для которой купим двух представителей).

Сама по себе задача вполне приемлема с точки зрения доступности ее решения для школьников. Два нюанса: во-первых, в ходе решения существенно использован комбинаторный подход; во-вторых, это первая задача из проанализированных, в которой речь идет о неразличимых элементах (рыбок одной породы мы считаем идентичными). И в данном случае дело не столько в решении конкретной задачи, сколько в том, как ПОСЛЕ ее решения ученик должен анализировать задачу такую*: «Сколькими способами можно выбрать из 10 красных, 12 синих, 5 зеленых, 4 черных и 8 белых рыбок: три рыбки; одну белую рыбку; три рыбки разных цветов?»* Если мы будем считать, что рыбки одного цвета неразличимы, то мы только что нашли ответ на последний вопрос, исследуя ситуацию с рыбками пяти пород. Но формулировка задачи все же другая. И если рассматривать задачу независимо от предыдущей, в такой формулировке все рыбки ДОЛЖНЫ быть различны. Почему? Хотя бы потому, что второй вопрос о белой рыбке – это задача о пирожках. А в таких задачах мы давно и прочно знаем, что все пирожки (машинки, шары и т. д.) различны. Итак, это априори «другая задача». Другими словами, мы приспосабливаемся к разным формулировкам разных задач и, прежде чем отвечать на тот или иной вопрос, должны определиться с классом задач, в который данный конкретный вопрос попадает. Плохого в этом ничего нет. Но неясности возникают даже у специалистов. А что говорить об учениках?

Можно, конечно, отказаться от таких задач в принципе. (Что и сделали авторы демонстрационных заданий ОГЭ и ЕГЭ.) Но от этого сами задачи не исчезнут. Как не исчезнет и соответствующая проблема.

И получается, что нужно разбираться с теоретической базой, которая наработана годами, на более детальном уровне. Это специалисту. А молодому учителю? А неподготовленному школьнику?

Поэтому, может быть, стоит пока обойтись пирожками и отработкой функциональной теоретико-вероятностной грамотности, полуинтуитивной? А уж если использовать более содержательные модели, то очень внимательно относиться к формулировками соответствующих задач.

Выводы

Выделим ряд соображений, которые прозвучали в статье и которые мы считаем существенными в связи с поставленными проблемами.

1. Требуется профессиональная, качественная корректировка теоретического и задачного материала, предлагаемого современным школьникам в рамках стохастической линии, а именно в области теории вероятностей. Это относится к отбору материала, к принятию обоснованного решения по содержанию, по его распределению по годам обучения, по базовой и углубленной составляющим. Нужны подробные программы, сборники заданий, методические материалы и многое другое. Кроме того, как мы уже неоднократно упомянули в тексте, необходим очень тщательный подход к формулировке практических заданий, предлагаемых школьникам. Шаг в сторону может означать резкое усложнение, пусть и на субъективном уровне, ситуации, ничем с объективной точки зрения не оправданное. Считаем, что для решения этой проблемы необходимо создание специальной комиссии, включающей в себя широкий спектр специалистов, от академиков до практикующих учителей.

2. Требуется учебник, полностью соответствующий программам и охватывающий все теоретические аспекты, предлагаемые для усвоения школьниками, и образцы подробного решения всех типов задач, используемых в образовательном процессе. При этом в учебнике (или в учебниках) материал должен быть «разложен» по годам обучения. Пока получается так: если речь идет о, например, алгебре, мы точно знаем, какая тема в каком классе изучается. Небольшие смещения, отвечающие разным используемым учебникам, в целом на данный подход не влияют. А если речь идет о теории вероятностей, такого распределения у нас нет. Это можно было хоть как-то объяснить, когда речь шла об изучении теории вероятностей избранными группами обучающихся (Математическая вертикаль, профильные классы и т. д.). В условиях, когда все школьники изучают данный раздел, такая ситуация недопустима.

3. Требуется пересмотр методических подходов к обучению теории вероятностей студентов математических факультетов педвузов, будущих учителей математики. Безусловно, в учебных планах предусмотрена дисциплина «Теория вероятностей» (иногда как отдельный курс, иногда вместе со статистикой, но предусмотрена – обязательно). Однако это – классический университетский курс, читаемый с позиций фундаментального подхода к освоению материала и весьма опосредованно относящийся к школьным задачам родственной тематики. Что делать? Вариантов, на наш взгляд, два. Либо параллельно с классическим изложением демонстрировать студентам решение задач на основании элементарных, «школьных» соображений. Либо создавать дисциплину по выбору, посвященную обучению студентов методике преподавания теории вероятностей в школе. В идеале желательно использовать обе эти возможности. К сожалению, все упирается в объем часов, предусмотренных учебным планом на освоение тех или иных дисциплин. Он очень невелик, и трудно вписаться в него с новыми задачами. Но это совершенно необходимо.

4. В заключение хочется сказать несколько слов о комбинаторике, без которой освоение теории вероятностей, видимо, не имеет смысла. Мы употребляем слово «видимо» потому, что, например, авторы пособий [2; 3; 7; 8] считают, что комбинаторику нужно использовать при изучении теоретико-вероятностных моделей только в случае крайней необходимости, что в большинстве случаев без нее можно и нужно обходиться. Мы категорически не согласны с таким подходом и считаем, что без комбинаторики теория вероятностей суха и, честно говоря, однобока. Однако комбинаторику можно изучать независимо от теории вероятностей, например, в курсе «Дискретная математика» (как сейчас и происходит, например, в ИМИ МПГУ). Мы считаем, что необходимость введения такого курса (помимо курса комбинаторики, включающего в себя теорию графов и теорию рекуррентных соотношений) в обучение школьной математике, по крайней мере на профильном уровне, давно созрела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* К вопросу о стохастической составляющей математической подготовки школьников и студентов // Математика и проблемы образования: материалы 41-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов. Киров: ВятГУ, 2022. С. 73–75.
2. Теория вероятностей и статистика / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 2008. 256 с.
3. Теория вероятностей и статистика: учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. М.: МЦНМО, 2014. 248 с.
4. ФИПИ (Федеральный институт педагогических измерений); Открытый банк заданий ОГЭ. М., 2022. URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (дата обращения: 04.11.2022).
5. ФИПИ (Федеральный институт педагогических измерений); Открытый банк заданий ЕГЭ. М., 2022. URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 04.11.2022).
6. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 с. (Б-ка «Квант». Вып. 23).
7. *Высоцкий И. Р., Ященко И. В.* Математика. Универсальный многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. В 3 ч. Ч. 3. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. Практические задачи. М.: Просвещение, 2020. 238 с.
8. Математическая вертикаль. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы / И. Р. Высоцкий, А. А. Макаров, Ю. Н. Тюрин, И. В. Ященко. М.: Просвещение, 2020. 256 с.

REFERENCES

1. Vetokhin A. N., Deza E. I. K voprosu o stokhasticheskoy sostavlyayushchey matematicheskoy podgotovki shkolnikov i studentov In: Matematika i problemy obrazovaniya. *Proceedings of the 41st International scientific seminar for teachers of mathematics and informatics of universities and pedagogical universities.* Kirov: VyatGU, 2022. Pp. 73–75.
2. Tyurin Yu. N., Makarov A. A., Vysotskiy I. R., Yashchenko I. V. *Teoriya veroyatnostey i statistika.* Moscow: MTsNMO, 2008. 256 p.
3. Tyurin Yu. N., Makarov A. A., Vysotskiy I. R., Yashchenko I. V. *Teoriya veroyatnostey i statistika: uchebnoe posobie dlya 10 i 11 klassov obshcheobrazovat. uchrezhdeniy.* Moscow: MTsNMO, 2014. 248 p.
4. FIPI (Federalnyy institut pedagogicheskikh izmereniy); Otkrytyy bank zadaniy OGE. Moscow, 2022. *Available at:* https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (accessed: 04.11.2022).
5. FIPI (Federalnyy institut pedagogicheskikh izmereniy); Otkrytyy bank zadaniy EGE. M., 2022. *Available at:* https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (accessed: 04.11.2022).
6. Kolmogorov A. N., Zhurbenko I. G., Prokhorov A. V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey.* Moscow: Nauka, 1982. 160 p. (B-ka “Kvant”. Iss. 23).

7. Vysotskiy I. R., Yashchenko I. V. Matematika. Universalnyy mnogourovnevyy sbornik zadach. 7–9 klassy. In 3 vols. Vol. 3. Statistika. Veroyatnost. Kombinatorika. Prakticheskie zadachi. Moscow: Prosveshchenie, 2020. 238 p.
8. Vysotskiy I. R., Makarov A. A., Tyurin Yu. N., Yashchenko I. V. *Matematicheskaya vertikal. Teoriya veroyatnostey i statistika. 7–9 klassy.* Moscow: Prosveshchenie, 2020. 256 p.

Ветохин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ; профессор кафедры ФН-1 «Высшая математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

e-mail: anveto27@yandex.ru

Vetokhin Alexander N., ScD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Differential Equations Department, Mathematics and Mechanics Faculty, Lomonosov Moscow State University; Professor, Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University

e-mail: anveto27@yandex.ru

Деза Елена Ивановна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики института математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Deza Elena I., ScD in Education, Full Professor, Professor, Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.12.2022
The article was received on 10.12.2022