

УДК 373.3:51-8
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/1819-463X-2021-4-209-221

ЗНАКОМСТВО С МАГИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ В НАЧАЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Е. В. Якушкина, А. О. Суровцева, О. А. Павлова

Аннотация. Исторический путь развития математики – смесь мистики и научного поиска. Одним из математических объектов, которым их исследователями придавался двойственный смысл, были магические квадраты. Благодаря Леонарду Эйлеру магические квадраты из забавы и головоломки трансформировались в эффективный инструмент решения сложных математических задач. При этом знакомство с магическими квадратами может быть начато уже в начальной школе. В статье использование магических квадратов рассмотрено в качестве инструмента интеллектуального развития младших школьников. Раскрыто содержание понятия «магический квадрат» и некоторых смежных понятий, описаны исторические аспекты появления магических фигур и представлена их авторская классификация. Описан образовательный потенциал заданий, связанных с магическими фигурами, и раскрыто содержание поэтапного знакомства младших школьников с данным видом нестандартных задач. Дочисловым прообразом магических квадратов выступают «логические» квадраты, заполненные абстрактными символами с учетом некой логической закономерности их расположения по строкам и столбцам. Первым числовым прообразом магических квадратов выступают латинские квадраты, а вот обобщение «магичности» фигур происходит при знакомстве с новыми объектами, такими как звезда, треугольник, колесо и пр.

Ключевые слова: математическое образование детей, младший школьник, магические квадраты, логические квадраты, магические фигуры, нестандартные задачи, методика преподавания математики.

Для цитирования: Якушкина Е. В., Суровцева А. О., Павлова О. А. Знакомство с магическими фигурами в начальном математическом образовании // Наука и школа. 2021. № 4. С. 209–221. DOI: 10.31862/1819-463X-2021-4-209-221.

© Якушкина Е. В., Суровцева А. О., Павлова О. А., 2021



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

INTRODUCTION TO MAGIC FIGURES IN ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION

E. V. Yakushkina, A. O. Surovtseva, O. A. Pavlova

Abstract. *The historical path of the development of mathematics is a mixture of mysticism and scientific research. One type of the mathematical objects to which their researchers gave a dual meaning were magic squares. Thanks to Leonard Euler, magic squares have transformed from fun and puzzles into an effective tool for solving complex mathematical problems. At the same time, acquaintance with magic squares can be started already in elementary school. The article examines the use of magic squares as a tool for the intellectual development of younger students. The concept of „magic square” and some related concepts are revealed, the historical aspects of the appearance of magic figures are described and their classification created by the authors of the article is presented. The educational potential of tasks related to magic figures is described, and the content of the stage-by-stage acquaintance of younger students with this type of non-standard tasks is revealed. A subnumeric prototype of magic square is a „logical” square filled with abstract symbols, taking into account a certain logical pattern of their arrangement in rows and columns. The first numerical prototypes of magic squares are Latin squares, but the generalization of the „magic” of figures occurs when meeting new objects such as a star, triangle, wheel, etc.*

Keywords: *mathematical education of children, elementary school student, magic squares, logical squares, magic figures, non-standard problems, methods of teaching mathematics.*

Cite as: Yakushkina E. V., Surovtseva A. O., Pavlova O. A. Introduction to Magic figures in elementary mathematics education. *Nauka i shkola / Science and School*. 2021, No. 4, pp. 209–221. DOI: 10.31862/1819-463X-2021-4-209-221.

Введение. В теории и практике начального математического образования значимым инструментом развития мышления ребенка, формирования его самостоятельности, смекалки и сообразительности признаны нестандартные задачи [1; 2]. Исследователи отмечают, что «работа с нестандартными заданиями (поиск решения, участие в конструировании таких задач, анализ предложенных решений, поиск своих и чужих ошибок решения, постановка вопросов самому себе и поиск ответов на них) является условием стимулирования саморазвития логической культуры ребенка» [3 с. 42].

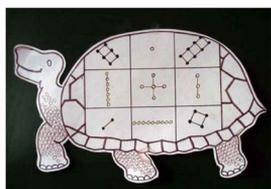
Одно из определений нестандартной задачи принадлежит Л. М. Фридману и Е. Н. Турецкому. Они трактовали это

понятие в широком смысле, как задачу, для которой «не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [4, с. 48]. Однако следует учесть, что для младших школьников нестандартными будут те задачи, по отношению к которым алгоритм решения им неизвестен на данный период времени. Это означает, что получить ответ на основе знакомых им способов действий не удастся, и ребенку необходимо постоянно искать новый путь решения, что в наибольшей мере способствует его интеллектуальному развитию.

Среди нестандартных задач, встречающихся на страницах учебников по математике разных авторов, фигурируют задачи разных типов (логические задачи, головоломки, лабиринты и пр.). В данной

статье мы представляем результаты исследования, направленного на выявление и обобщение образовательного потенциала одного из видов головоломок, которые называются магическими квадратами.

Из истории появления магических квадратов. Первые магические квадраты появились в Китае (4000–5000 лет назад). Узор из связанных черных и белых точек, украшавший панцирь огромной черепахи (рис. 1), иллюстрирует один из способов записи чисел в «доцифровой» период. Этот квадрат существует в единственном виде, но варианты этого магического квадрата можно получить путем поворотов или отражений [5, с. 305].



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 1. Черепаха из легенды о Ло Шу и современная интерпретация узора

Люди еще в древности были уверены в том, что числа способны влиять на их жизнь, поэтому им часто придавался некий магический смысл. Пять в центре – это обозначение земли, а вокруг прочие элементы (вода, огонь, металл, дерево) в равновесии между собой. Это равновесие передано через математический смысл: цифры, расположенные симметрично относительно центра, образуют в сумме число 10, а значит по любой диагонали, вертикали или горизонтали в сумме получается «магическое» число 15.

Древнегреческий ученый и философ Пифагор работал над теорией чисел и развивал это учение. Нумерологический квадрат Пифагора являлся «цифровым» инструментом (расчет проводился по определенному алгоритму, отталкиваясь от даты рождения человека),

позволяющим определить склонности, скрытые способности и характерные черты индивида, заложенные в нем «от природы». Цифры от 1 до 9 несли в себе определенное значение, а частотность их повторения усиливала качество, которое присуще человеку [5, с. 307].

Таким образом, явно или неявно проявляющиеся математические свойства чисел людьми искусственно наделялись магическим смыслом, поэтому квадраты и стали называть магическими. Данная идея получила развитие как в самой математике, так и в искусстве.

В начале XVI в. немецкий художник Альбрехт Дюрер написал гравюру «Меланхолия», где изобразил магический квадрат 4-го порядка¹ (размер квадрата 4×4) с магической константой равной 34 (рис. 2). Помимо классического понимания «магичности» квадрата, когда он заполнен натуральными числами так, что их суммы «по всем строкам, столбцам и обеим диагоналям одинаковы» [6, с. 18], здесь работают дополнительные факторы. Магическое число 34 получается и при суммировании четверок чисел, расположенных в центре, по бокам центрального квадрата, а также образующих четыре равных квадрата, на которые можно разделить исходный квадрат.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 2. Квадрат Дюрера

Баше де Мезириаке в XVI–XVII вв. описал графический способ построения квадратов нечетного порядка (сторона квадрата является нечетным числом). Данный вид деятельности он рассматривал как математическую забаву.

¹ Порядком квадрата называют количество его строк (столбцов).

Одним из родственников магических квадратов является латинский квадрат – таблица « $n \times n$ » клеток, в которых написаны числа $1, 2, \dots, n$, притом так, что каждое число встречается в строке и столбце по одному разу» [5, с. 308]. Свое название он получил благодаря тому, что в XVIII в. всеми известный ученый-математик Леонард Эйлер, занимаясь методами построения магических квадратов, произвел замену цифр на буквы латинского алфавита. Объект, который Эйлер рассматривал как новый вид магического квадрата и инструмент решения комбинаторных задач, является традиционной головоломкой с числами – судоку.

Уже в XX в. произошло и другое обобщение идеи магического квадрата. В работах популяризатора науки Я. И. Перельмана проявилось все разнообразие *волшебных (магических) фигур*: от квадратов он перешел к числовым треугольникам, магическим и восьмиконечным звездам, числовым колесам и даже трезубцам [7]. «Магичность» данных фигур может проявляться различными способами, то есть должна быть некая логическая закономерность их заполнения конкретными числовыми значениями.

В современных исследованиях *волшебные математические квадраты (магические и латинские)* рассматриваются уже не как мистический объект, а как предмет серьезного научного исследования. В этих работах «решение» магического квадрата – описание способов его построения – представлено в обобщенном виде [6, с. 18–19].

«Семейство» магических квадратов включает следующих представителей:

- традиционный магический квадрат – в квадратную матрицу $n \times n$ заносится строго натуральный ряд чисел от 1 до n^2 , по любой диагонали, вертикали или горизонтали в сумме получается «магическое» число;
- ассоциативный (симметричный) магический квадрат – магический квадрат,

у которого сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, равна $n^2 + 1$;

- дьявольский (пандиагональный) магический квадрат – магический квадрат, в котором с магической константой совпадают суммы чисел по ломаным диагоналям в обоих направлениях или четверки чисел, образующие квадраты 2-го порядка внутри большого квадрата (см. рис. 2) [8, с. 5–9].

- нетрадиционный магический квадрат – в квадратную матрицу $n \times n$ заносится не строго натуральный ряд чисел, а произвольные числа, по любой диагонали, вертикали или горизонтали в сумме получается «магическое» число.

В полумагических квадратах имеются отдельные нарушения заявленной «магичности», например, сумма чисел по диагонали не равна магическому числу.

«Семейство» латинских квадратов включает:

- традиционный латинский квадрат судоку – заполненный числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце все эти числа встречаются по одному разу [5, с. 307–308];

- нетрадиционный латинский квадрат – квадрат, заполненный произвольными символами (числами или буквами) так, что в каждой строке и каждом столбце все эти символы встречаются по одному разу.

- логический квадрат – квадрат, заполненный абстрактными символами (различными фигурами, изображениями и предметами), среди которых по строкам и столбцам прослеживается некоторая логическая закономерность расположения отдельных элементов.

Таким образом, волшебные фигуры отличаются своим многообразием. Изучив весь спектр встречающихся в разных источниках заданий, связанных с волшебными фигурами [1; 6–9], мы разработали их авторскую классификацию (рис. 3).

Основываясь на данной классификации, мы спроектировали методику



Рис. 3. Классификация волшебных фигур

включения заданий, связанных с волшебными фигурами, в процесс обучения младших школьников.

Магические фигуры в обучении.

В современных пособиях, направленных на математическое развитие дошкольников и младших школьников, в дочисловой период обучения достаточно часто фигурируют «прародители» магических квадратов – логические квадраты. Эти квадраты заполняются различными фигурами, изображениями и предметами, то есть образами, наиболее близкими детям с постепенным повышением уровня их абстрактности. Дошкольники и первоклассники начинают знакомиться именно с логическими квадратами, так как считать еще не умеют [10; 11]. Позднее картинки в логических квадратах заменяют числами, и школьники начинают работать с латинскими и магическими квадратами.

Рассмотрев разные классификации нестандартных задач [12–14], мы установили, что волшебные фигуры следует рассматривать как математическое развлечение (отдых от основного вида деятельности, головоломку), связанное с активным перебором вариантов отношений, и как инструмент развития логического мышления школьников.

В целом отдельные виды заданий учитель может использовать как на уроке, так и во внеурочной деятельности.

Например, в содержание урока можно включать задания с логическими квадратами, чтобы, с одной стороны, переключить внимание детей за счет нестандартной формы учебного задания, а с другой стороны, апеллировать к изучаемым математическими понятиями (геометрические фигуры и их свойства).

В исследовании Ю. А. Дробышева и И. В. Дробышевой подчеркивается значимость обращения к истории математики как к инструменту усвоения самой математики; актуальность заданий, «которые были бы направлены на мотивацию учащихся к изучению элементов истории математики и раскрытию того, как происходило знакомство с математикой у разных народов» [15, с. 34]. Задачи, связанные с магическими квадратами, имеют непосредственное отношение к истории математики, поэтому во внеурочной деятельности им можно посвятить отдельное занятие математического кружка. Или же можно предложить учащимся следующие темы учебных исследовательских проектов историко-математического содержания: «Квадрат Пифагора», «Загадка гравюры Меланхолия», «Создай магический квадрат», «Волшебный мир магических фигур» и пр.

Подобные проекты позволяют устанавливать межпредметные связи с другими дисциплинами, ведь на уроке ИЗО можно познакомить детей с картиной

Альбрехта Дюрера «Меланхолия», и это будет поводом к самостоятельному исследованию детьми свойств квадрата, который изображен позади ангела.

Методика обучения младших школьников решению магических фигур. Решение магических и логических квадратов подразумевает заполнение недостающих окошек в соответствии с логикой построения конкретного квадрата (или иной фигуры). Таким образом, чтобы решить квадрат, нужно:

1) понять логику его построения;

2) последовательно в соответствии с выявленной логикой выстраивать недостающие элементы, начиная с областей (строк, столбцов и диагоналей), где не хватает только одного элемента.

В целом работу с магическими фигурами целесообразно выстроить поэтапно по мере повышения сложности задания, предлагаемого к выполнению.

I этап. Знакомство с логическими квадратами.

В логических квадратах используются изображения конкретных геометрических фигур, близких детям по содержанию рисунков (игрушки и пр.); имитированные образы реальных объектов, состоящих из других элементов (человечек из геометрических фигур); комбинированные изображения, не имеющие реального прообраза. На этом этапе сложность заданий зависит от размерности квадрата; количества признаков, которые претерпевают изменения; количества пропущенных элементов; сложности самих изображений.

1.1. Полные логические квадраты. Начинаем работу по решению квадратов в начальной школе с полных логических квадратов с изображением предметов. Это обусловлено тем, что данный вид заданий будет для детей наиболее понятным в силу того, что предметы, используемые в квадратах на начальной ступени, детям будут наиболее близки.

При этом решение логических квадратов необходимо начинать с квадратов

2-го порядка и допускаются задания с одним признаком, например, количество или размер предметов.

После работы с квадратами начального уровня сложности убирается детализация объектов и рисунки становятся более схематичными, помимо этого добавляется новый вид квадрата – квадрат 3-го порядка, дети также апеллируют одним существенным признаком (цвет, размер, назначение предмета и др.).

В заданиях данного типа дети пытаются увидеть закономерность, которая в них проявляется, и *объяснить* ее.

1.2. Логические квадраты, требующие дополнения. Начинаем с заданий, в которых пропущен лишь один элемент, и постепенно увеличиваем количество пустых «окошек» (рис. 4).

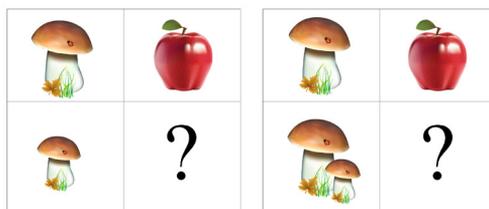


Рис. 4. Логический квадрат 2-го порядка с одним изменяющимся признаком

При решении первого квадрата 3-го порядка целесообразно дать детям полностью правильно заполненный квадрат и попробовать установить совместно с детьми закономерности расположения элементов в данном квадрате, тем самым обосновав его «волшебство» (возвращение к п. 1.1). Здесь же можно показать детям, что если заменить картинки на геометрические фигуры, то принцип работы с таким квадратом будет аналогичен (солнце – это круг, елочка – треугольник и пр.). При этом важно предлагать детям только те задания, когда при создании квадрата будет изменяться только один признак (цвет, форма, размер и др.).

В учебных пособиях предлагаются логические квадраты с указанием

возможных вариантов ответов (рис. 5). Усложнение происходит введением 2–4-го изменяемого признака, что сопровождается усложнением рисунка. При этом сначала целесообразно использовать задания, где нужно выбрать необходимую фигуру из предложенных, а после уже переходить к заданиям без указания вариантов ответа. Комбинировать можно несколько признаков: размер и цвет, цвет и форма и др.

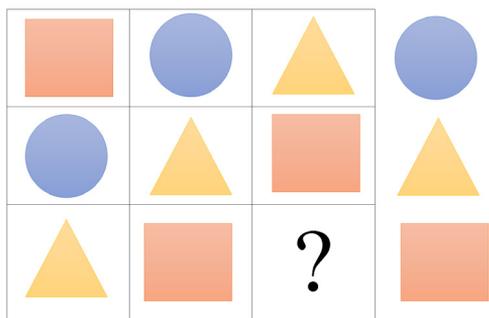


Рис. 5. Логический квадрат с вариантами ответа

Уже на данном этапе для квадратов 3-го порядка можно включать новые элементы (линии, стрелки, точки и др.), комбинации нескольких признаков (цвет, форма, количество точек и пр.) и увеличивать количество пропущенных элементов (рис. 6).

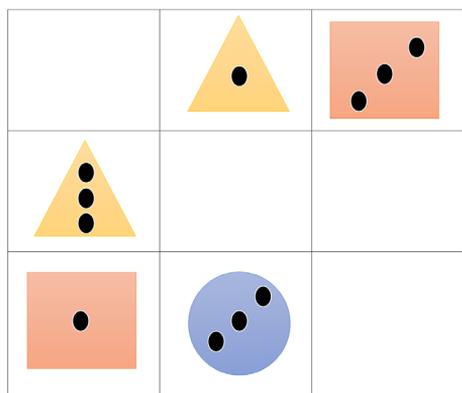


Рис. 6. Логический квадрат с несколькими изменяемыми признаками

1.3. Творческие задания с логическими квадратами. Стоит отметить, что на всех этапах знакомства с последовательно усложняющимися логическими квадратами можно включать задания типа: «Исправь квадрат так, чтобы он стал логическим» и «Создай свой логический квадрат».

На данном этапе можно ввести понятие «логическое sudoku» (рис. 7). При этом первое задание, связанное с sudoku, необходимо выполнять с предложенными вариантами ответов для детей, и количество вариантов ответа должно совпадать с количеством пропусков, чтобы дети смогли в полной мере понять алгоритм решения такого типа заданий. Подобное задание удобно выполнять с использованием интерактивной доски или на основе манипулирования карточками с рабочим полем и элементами для вставки в пустые окошки.

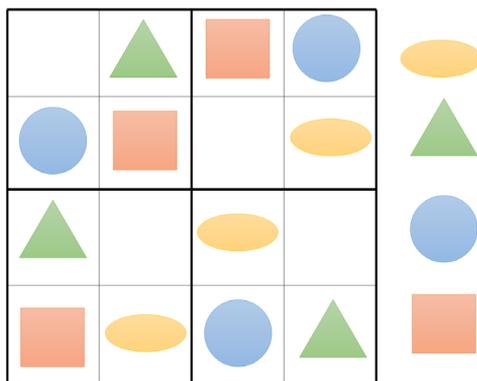


Рис. 7. Логическое sudoku с вариантами ответов

II этап. Знакомство с латинскими квадратами.

На данном этапе в ячейках квадратов вместо картинок начинают появляться числа.

Замечательный педагог, организатор олимпиад для младших школьников в Калужской области Юрий Александрович Дробышев предлагает следующее задание: «Для шифрования текстов

знаменитый швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) использовал латинские квадраты. На рисунке (рис. 8) приведен латинский квадрат, содержащий четыре строки и четыре столбца. Заполните оставшиеся клетки в таблице так, чтобы в каждой строке и каждом столбце только один раз было использовано каждое из чисел: 1, 2, 3, 4. Постарайтесь найти как можно больше различных вариантов решения этой задачи» [1, с. 46].

1	2	3	4
2			
3			
4			

Рис. 8. Латинский квадрат 4-го порядка

Уже на данном этапе дети могут убедиться, что квадраты данного вида обладают новым свойством: сумма чисел в строках и столбцах совпадает (рис. 9).

8	6	4	2	— 20	
6	4	2	8	— 20	
4	2	8	6	— 20	
2	8	6	4	— 20	
24	20	20	20	20	24

Рис. 9. Нетрадиционный латинский квадрат 4-го порядка

Среди олимпиадных заданий встречаются задания с латинскими квадратами, которые предполагают составление не всего магического квадрата, а нахождения какого-то определенного числа.

«Таблицу нужно заполнить, используя числа 1, 2, 3, 4, 5, так, чтобы каждое

число появилось в каждом столбце, каждой строчке и каждой диагонали ровно по одному разу. Первые несколько чисел уже расставлены. Какое число будет в центральной клетке?» (рис. 10) [16, с. 38].

3	4			5
2				
		?		
				4

Рис. 10. Латинский квадрат 5-го порядка

III этап. Знакомство с магическими квадратами.

2.1. Проверка «магичности» полного квадрата. Следует отметить, что изучение каждого вида магических квадратов лучше проводить раздельно. Это связано с тем, что детям сложно понять механизм работы каждой разновидности магического квадрата.

Первый способ знакомства с данным понятием предполагает формулировку «магичности» квадрата и предложение проверить «магичность» тех или иных квадратов (рис. 11). Ученик должен сам проверить выполнение условий и провести необходимое обоснование «магичности» или «немагичности» квадрата.

Однако можно рассмотреть альтернативный способ введения данного понятия, при котором ученики должны сами обнаружить (подметить) закономерность, проявляющуюся в построении конкретного квадрата.

На данном этапе порядок квадрата и его «четность» не важны. Однако у каждого квадрата будет свое «магическое» число, которое его характеризует. По этому числу квадраты можно характеризовать и отличать друг от друга.

67	1	43	12	27	9	12	22	8	4	9	2	4	14	15	1
13	37	61	18	15	21	10	14	18	3	5	7	9	7	6	12
31	73	7	24	3	18	20	6	16	8	1	6	5	11	10	8
												16	2	3	13

Рис. 11. Квадраты 3-го и 4-го порядка

В дальнейшем можно ввести понятие «четности» или «нечетности» магического квадрата (в зависимости от его размерности либо в зависимости от четности-нечетности магического числа). Дети определяют, какой квадрат будет являться магическим квадратом четного (нечетного) порядка, и *обосновывают свою точку зрения путем рассуждений*.

В случае, когда при проверке «магичности» квадрата дети сталкиваются с нарушением отдельных условий, учитель может ввести понятие полумагического квадрата. После этого педагог может предложить детям сравнить магический и полумагический квадраты, проверить в конкретных ситуациях условия полумагичности для конкретного квадрата, внести необходимые изменения, чтобы квадрат стал магическим.

2.2. Решение магических квадратов. Решение магических квадратов предполагает поиск числа, которое необходимо вставить в пустое окошко (рис. 12 слева), и связано непосредственно с вычислениями. Необходимо проверить, может ли квадрат быть магическим (частичная проверка); в случае предполагаемой «магичности» найти определяющую сумму (магическое число квадрата); рассчитать и вставить пропущенное число; проверить все условия «магичности» квадрата.

Повышение сложности заданий данного типа заключается в увеличении количества пропущенных окошек. При этом следует обращать внимание на

многообразии путей решения и поиск наиболее эффективных из них за счет минимизации числа шагов.

Можно заметить, что методика работы с магическими квадратами подразумевает не только поиск решения, но и его обоснование путем выстраивания цепочки логических рассуждений.

Формулировки заданий к одним и тем же квадратам должны быть вариативными (рис. 12 справа): определите магическое число данного квадрата; сколькими способами это можно сделать; докажите, что вместо звездочки не может стоять конкретное число (любое больше 13 или число больше 33) и пр. Следует иметь в виду, что детям будет легче решить (заполнить) квадрат полностью и увидеть, что в этой клетке будет стоять число 13, а значит, не может стоять другое число. В то же время число большее 33 не подойдет, так как сумма не может быть меньше одного из слагаемых.

2.3. Создание магических квадратов. Когда дети смогут решать квадраты самостоятельно, то можно начать работу по созданию собственных

10	15	8	10		
9	11	*	9	11	*
14	7	12	14		12

Рис. 12. Магические квадраты 3-го порядка

магических квадратов. При этом дети могут создавать свои магические квадраты методом проб и ошибок, исходя из собственного понимания магичности.

В дополнение можно познакомить детей с понятиями симметрического и дьявольского квадрата, однако подробно на этих моментах останавливаться не стоит в силу их повышенной сложности.

IV этап. Знакомство с магическими фигурами.

Так как понятие магического квадрата уже знакомо детям, то можно предложить пофантазировать о «магичности» других геометрических фигур. Для начала следует предложить детям творческое задание – придумать, в какую форму можно добавить магию помимо квадрата, и предложить на выбор несколько форм: круг (колесо), треугольник, звезда и др.

Выполняя данное задание, дети должны суметь объяснить магичность своей фигуры (в чем она состоит) и дать ей название. Рассмотрев все варианты, разработанные детьми, следует предложить новые варианты магических фигур.

3.1. Магическая звезда. Какое число необходимо вставить в фигуру, чтобы звезда стала магической? При этом можно намекнуть детям о том, что порядок чисел имеет свою закономерность (рис. 13, 1).

3.2. Магический треугольник [7, с. 61]. Сказочный герой просит заполнить круги, образующие треугольник, цифрами от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел на каждой стороне была равна 20. Выполняя данное задание, дети должны увидеть, что вариантов заполнения

треугольника может быть несколько (см. рис. 13, 2).

3.3. Магический круг, или числовое колесо. Есть три основных «правила» работы с числовым колесом.

3.3.1. Вставь пропущенное число так, чтобы колесо заработало (см. рис. 13, 3.1).

3.3.2. Вставь пропущенное число так, чтобы правило выполнялось (см. рис. 13, 3.2).

Выполняя задания, дети должны прийти к выводу, что в одном случае сумма чисел в симметрично расположенных секторах равны, а в другом – суммы чисел двух половин круга равны.

3.3.3. Цифры от 1 до 9 размещены в числовом колесе так, чтобы одна цифра была в центре круга, прочие – у концов каждого диаметра и чтобы сумма трех цифр каждого ряда составляла 15 (см. рис. 13, 3.3).

Детям необходимо прийти к выводу о том, что сумма каждых трех чисел, проходящих через центр, должна совпасть, а значит, цифра, находящаяся в центре круга, не должна превышать 10, иначе будет мало вариантов создания числового колеса и мы не сможем заполнить его так, чтобы цифры не повторялись. Можно обратить внимание детей на то, что в последнем случае числовое колесо является альтернативным визуальным образом магического квадрата.

Создание новых заданий учителем. Учитель может познакомиться с историческими способами построения магических квадратов (индийский метод, метод Баше и др.). В то же время значительную помощь учителю в создании



Рис. 13. Магические фигуры: 1 – магическая звезда; 2 – магический треугольник, 3.1–3.3 – магическое колесо

новых заданий может оказать знание некоторых свойств магических квадратов. Квадрат остается магическим, если все числа, входящие в его состав, увеличить или уменьшить на одно и то же число; умножить или разделить на одно и то же число, сложить соответствующие элементы двух магических квадратов и пр. [17, с. 294–295]. Имея несколько заготовок магических квадратов, учитель может вносить в них незначительные изменения, тем самым получая новые варианты заданий:

- Оставить пустой одну или несколько клеток. Дети должны будут заполнить пропуски.

- Поменять местами какие-то элементы или заменить одни числа на другие. Дети должны будут обнаружить ошибку.

Школьников, интересующихся математикой, можно привлекать к созданию заданий для одноклассников. Это может стать темой проектного задания или учебно-исследовательского проекта.

Заключение. В данной статье нами были рассмотрены теоретические и практические аспекты использования магических квадратов в начальном математическом образовании. Магические квадраты, так же как и их ближайшие родственники (полумагические квадраты, латинские квадраты и магические фигуры), относятся к математическим головоломкам – типу нестандартных задач, требующих особых подходов к их решению, связанных с использованием

широкого спектра логических универсальных учебных действий.

Проведенное исследование позволило определить место каждого из выявленных типов заданий, связанных с волшебными (магическими) фигурами, что нашло отражение в разработанной нами классификации. Собственно магические квадраты являются предметом изучения математиков на протяжении длительного периода, а методы их построения составляют основу сложных научных теорий. При этом в качестве базисного уровня «магичности» фигур следует рассматривать логические квадраты, под которыми понимают квадраты, заполненные абстрактными символами (различными фигурами, изображениями и предметами), среди которых по строкам и столбцам прослеживается некоторая логическая закономерность расположения отдельных элементов.

Основываясь на разработанной классификации и выявленных уровнях сложности заданий, связанных с решением магических и логических квадратов, нами была разработана и описана методика поэтапного знакомства младших школьников с данным типом нестандартных задач, включающая 5 этапов. С помощью такой поэтапной работы с магическими объектами дети получают знания о способах решения магических и логических квадратов и их разновидностях, что в целом будет способствовать их логическому развитию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробышев Ю. А. О развитии обучающихся средствами математики // Актуальные проблемы обучения математике: сб. науч. тр. / под ред. Ю. А. Дробышева. Калуга, 2014. С. 43–49.
2. Павлова О. А. Механизмы стимулирования саморазвития логического мышления ребенка в дополнительном математическом образовании // Вопросы педагогики. 2019. № 12–1. С. 188–193.
3. Павлова О. А. Педагогическое сопровождение саморазвития логической культуры младшего школьника в дополнительном математическом образовании // Вестн. Калужского ун-та. Сер. 1: Психологические науки. Педагогические науки. 2019. Т. 2, № 4 (5). С. 37–42.

4. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1984. 154 с.
5. Дудка Л. С., Красноперов А. О., Гусаров А. А. Из истории магических квадратов // Аллея науки. 2017. Т. 1, № 15. С. 305–308.
6. Постников М. М. Магические квадраты. М.: Наука. 1964. 84 с.
7. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. М.: Юрайт, 2020. 163 с.
8. Макарова Н. В. Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009. 180 с.
9. Малых А. Е. Магические квадраты. Пермь: Изд-во: ПГПИ, 1992. 46 с.
10. Чиркова Н. И., Павлова О. А. Развитие у младших школьников приема сравнения при изучении математики // Начальная школа. 2018. № 6. С. 49–53.
11. Лыфенко А. В., Чиркова Н. И. Методика изучения таблиц и диаграмм в начальном курсе математики // Начальная школа. 2016. № 4. С. 58–65.
12. Кордемский Б. А. Очерки о математических задачах на смекалку. М.: Учпедгиз, 1958. 118 с.
13. Лавлинская Е. Ю. Методика работы с задачами повышенной трудности в начальной школе. Волгоград: Перемена, Волгоградский гос. пед. ун-т, 2010. 162 с.
14. Мендыгалеева А. К. Некоторые виды нестандартных задач в начальном курсе математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т. 17. С. 686–690.
15. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. Историко-математический компонент в учебниках математики 5–6-х классов // Вестн. Красноярского гос. пед. ун-та им. В. П. Астафьева. 2020. № 3 (53). С. 27–39.
16. Дробышев Ю. А. Олимпиады по математике. М.: Экзамен, 2019. 143 с.
17. Тонких А. П. Математика: учебное пособие для студентов факультетов подготовки учителей начальных классов. Кн. 2. М.: КДУ, 2008. 444 с.

REFERENCES

1. Drobyshev Yu. A. O razvitiy obuchayushchikhsya sredstvami matematiki. In: Drobysheva Yu. A. (ed.) *Aktualnye problemy obucheniya matematike. Coll. of scient. papers.* Kaluga, 2014. Pp. 43–49.
2. Pavlova O. A. Mekhanizmy stimulirovaniya samorazvitiya logicheskogo myshleniya rebenka v dopolnitelnom matematicheskom obrazovanii. *Voprosy pedagogiki.* 2019, No. 12–1, pp. 188–193.
3. Pavlova O. A. Pedagogicheskoe soprovozhdenie samorazvitiya logicheskoy kultury mladshogo shkolnika v dopolnitelnom matematicheskom obrazovanii. *Vestn. Kaluzhskogo un-ta. Ser. 1: Psikhologicheskie nauki. Pedagogicheskie nauki.* 2019, Vol. 2, No. 4 (5), pp. 37–42.
4. Fridman L. M., Turetskiy E. N. *Kak nauchitsya reshat zadachi: posobie dlya uchashchikhsya.* Moscow: Prosveshchenie, 1984. 154 p.
5. Dudka L. S., Krasnoperov A. O., Gusarov A. A. Iz istorii magicheskikh kvadratov. *Alleya nauki.* 2017, Vol. 1, No. 15, pp. 305–308.
6. Postnikov M. M. *Magicheskie kvadraty.* Moscow: Nauka. 1964. 84 p.
7. Perelman Ya. I. *Zhivaya matematika. Matematicheskie rasskazy i golovolomki.* Moscow: Yurayt, 2020. 163 p.
8. Makarova N. V. *Volshebnyy mir magicheskikh kvadratov.* Saratov, 2009. 180 p.
9. Malykh A. E. *Magicheskie kvadraty.* Perm: Izd-vo PGPI, 1992. 46 p.
10. Chirkova N. I., Pavlova O. A. Razvitie u mladshikh shkolnikov priema sravneniya pri izuchenii matematiki. *Nachalnaya shkola.* 2018, No. 6, pp. 49–53.
11. Lyfenko A. V., Chirkova N. I. Metodika izucheniya tablits i diagramm v nachalnom kurse matematiki. *Nachalnaya shkola.* 2016, No. 4, pp. 58–65.
12. Kordemskiy B. A. *Ocherki o matematicheskikh zadachakh na smekalku.* Moscow: Uchpedgiz, 1958. 118 p.
13. Lavlinskaya E. Yu. *Metodika raboty s zadachami povyshennoy trudnosti v nachalnoy shkole.* Volgograd: Peremena, Volgogradskiy gos. ped. un-t, 2010. 162 p.

14. Mendygalieva A. K. Nekotorye vidy nestandartnykh zadach v nachalnom kurse matematiki. *Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal „Kontsept“*. 2016, Vol. 17, pp. 686–690.
15. Drobyshev Yu. A., Drobysheva I. V. Istoriko-matematicheskiy komponent v uchebnikakh matematiki 5–6-kh klassov. *Vestn. Krasnoyarskogo gos. Ped. un-ta im. V. P. Astafyeva*. 2020, No. 3 (53), pp. 27–39.
16. Drobyshev Yu. A. *Olimpiady po matematike*. Moscow: Ekzamen, 2019. 143 p.
17. Tonkikh A. P. *Matematika: uchebnoe posobie dlya studentov fakultetov podgotovki uchiteley nachalnykh klassov*. Vol. 2. Moscow: KDU, 2008. 444 p.

Якушкина Евгения Викторовна, студент, Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

e-mail: zhenya.yakushkina00@gmail.com

Yakushkina Evgenya V., Student, Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky

e-mail: zhenya.yakushkina00@gmail.com

Суровцева Анастасия Олеговна, студент, Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

e-mail: anastasiasurovceva17@gmail.com

Surovtseva Anastasiya O., Student, Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky

e-mail: anastasiasurovceva17@gmail.com

Павлова Оксана Алексеевна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики дошкольного, начального и специального образования, Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского

e-mail: oksanapav@yandex.ru

Pavlova Oksana A., PhD in Education, Associate Professor, Assistant Professor, Theory and Methodology of Preschool, Primary and Special Education Department, Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky

e-mail: oksanapav@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 13.01.2021

The article was received on 13.01.2021