УДК 372.851
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/1819-463X-2025-5-203-216

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания

О ПОНЯТИИ ФУНКЦИИ И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ. ЧАСТЬ 2[1]

М. Д. Лисицын

Аннотация. *Статья затрагивает проблему содержания и изложения материала, связанного с понятием функции, в школьном курсе математики. Оформившийся в методике способ ее решения (совмещение «генетического» и «логического» подходов) в действительности не позволяет устранить изолированность общего понятия и частных видов функций (в конкретной ситуации требуется обращение либо к первому, либо ко второму, но тогда связь между ними теряется). Предлагается при изучении функции больше внимания уделить тому, для чего она нужна в рамках учебного процесса. Для этого следует рассматривать формулу и график как разные мыслительные средства, служащие для выражения отношения между переменными величинами, а функцию как результат их соотнесения, выстраивания отношений между ними. Такой подход позволяет по-новому взглянуть на причины актуальных проблем школьников, возникающие при переходе от одного представления функции (аналитического или графического) к другому. С целью выяснения того, что могут сделать обучающиеся фактически при осуществлении этого перехода, были проведены два исследования. В результате первого, проходившего в рамках вступительной работы Малого мехмата МГУ, были выявлены не только ошибки школьников, возникшие при переходе от формулы к графику функции, но и невозможность более глубокого выяснения их причин без анализа имеющихся у учеников мыслительных средств (связанных с математическим содержанием либо самоконтролем). Второе исследование, которое проводилось среди студентов-нематематиков Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», показало, что задача на определение формулы по графику даже несложной функции оказалась для выпускников школ сродни исследовательской. Общим в исследовании являлось неоднократное обращение обучающихся к изначальному представлению функции для корректировки нового, что указывает на присутствие*

[1] Вторая статья по проблеме исследования. Первая была опубликована в № 4 за 2025 год.

в данной ситуации сложной связи (отношения), выходящей за границы единичной операции. На основе сделанных наблюдений сформулированы методические предложения.

Ключевые слова: *методика преподавания, понятие функции, мыслительные средства, аналитическое представление функции, графическое представление функции, переход между представлениями.*

Для цитирования: *Лисицын М. Д.* О понятии функции и ее аналитическом и графическом представлениях. Часть 2 // Наука и школа. 2025. № 5. С. 203–216. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-5-203-216.

ON THE CONCEPT OF FUNCTION AND ITS ANALYTICAL AND GRAPHICAL REPRESENTATIONS. PART 2

M. D. Lisitsyn

Abstract. *The article addresses the problem of the content and presentation of the material related to the concept of function in the school mathematics course. The method of solving it in the methodology (combining the "genetic" and "logical" approaches) does not allow to eliminate the isolation of the general concept and certain types of functions (in a particular situation, it is necessary to use either of them, but then there is no relationship between them). When studying function, it is suggested to focus more on what it is needed for in the learning process. To do this, formula and graph are considered as different mental means used to express the relationship between variables, and function as the result of their correlation that arises when constructing relationships between these means. This approach gives us a new perspective on the causes of the current problems schoolchildren face in relation to the transition from one representation of a function (analytical or graphical) to the other. Two studies were conducted with the aim to find out how students can actually do during these transitions. The first one, which took place as part of the entrance exam for school students of Lomonosov MSU Junior department of mechanics and mathematics, revealed not only the factual mistakes of nine-graders which arose when simplifying expressions and when switching from the formula of the function to its graph, but also the impossibility of clarifying their causes in more depth without analyzing the students' mental means (related to mathematics or self-control). The second study, which was conducted among non-mathematical students at HSE University, showed that the task of constructing the formula according to the graph of a linear function was similar to research for school graduates. What both studies have in common is the repeated reference of students to the original representation of the function in order to correct the new one, which indicates the presence of a complex relationship that is beyond the boundaries of a single operation. On the basis of these studies, methodological proposals are presented.*

Keywords: *teaching methodology, the concept of function, mental means, analytical representation of a function, graphical representation of a function, transition between representations.*

Cite as: Lisitsyn M. D. On the concept of function and its analytical and graphic representations. Part 2. *Nauka i shkola.* 2025, No. 5, pp. 203–216. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-5-203-216.

В предыдущей части данной статьи мы привели теоретические основания исследования. В данной сосредоточимся на нем самом.

Анализ действий обучающихся, связанных с переходом от аналитического представления функции к графическому

Целью первого направления исследования является разработка диагностики ошибок, относящихся непосредственно к проблеме перехода от формулы к графику. Но поскольку априори разработать диагностику для заявленной проблемы довольно сложно, мы строим ее итеративно. На первом этапе мы ограничились анализом решений школьников задачи, в которой такой переход происходит, выявлением фактических ошибок и выдвижением предложений, как можно изолировать интересующий нас феномен от других. Анализ проводился в рамках вступительной работы Малого мехмата МГУ для 9-го класса от 29.09.2024, где решение одной из задач требовало построения графика линейной функции с ОДЗ, не содержащей одно значение переменной, после упрощения выражения (рис. 1).

2. **В-1.** Постройте график функции: $y = \dfrac{x^6(x^2+x+1) - x^3(x^2+x+1) + x^2+x+1}{x^2+x+1} \cdot \dfrac{2x^4+2x}{x^9+1}$.

В-2. Постройте график функции: $y = \dfrac{x^6(x^2-x+2) - x^3(x^2-x+2) + x^2-x+2}{x^2-x+2} \cdot \dfrac{2x^4+2x}{x^9+1}$.

Ответ В-1. Прямая, заданная уравнением $y = 2x$, с выколотой точкой $(-1, -2)$.

Ответ В-2. Прямая, заданная уравнением $y = 2x$, с выколотой точкой $(-1, -2)$.

Решение В-1. При любых значениях x выражение x^2+x+1 принимает положительные значения. Следовательно, $y = \frac{(x^6-x^3+1)\cdot 2x(x^3+1)}{x^9+1}$. По формуле суммы кубов $x^9+1 = (x^3+1)(x^6-x^3+1)$. Заметим, что при любых значениях t выражение t^2-t+1 принимает положительные значения. Поэтому при любых x верно $(x^3)^2-(x^3)+1>0$. Значит, $y = \frac{2x(x^3+1)}{x^3+1}$. Поскольку $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ имеет только один ноль: $x=-1$, искомый график будет выглядеть в точности как прямая линия, задаваемая уравнение $y = 2x$, с выколотой точкой при $x=-1$.

Решение В-2. При любых значениях x выражение x^2-x+2 принимает положительные значения. Следовательно, $y = \frac{(x^6-x^3+1)\cdot 2x(x^3+1)}{x^9+1}$. По формуле суммы кубов $x^9+1 = (x^3+1)(x^6-x^3+1)$. Заметим, что при любых значениях t выражение t^2-t+1 принимает положительные значения. Поэтому при любых x верно $(x^3)^2-(x^3)+1>0$. Значит, $y = \frac{2x(x^3+1)}{x^3+1}$. Поскольку $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ имеет только один ноль: $x=-1$, искомый график будет выглядеть в точности как прямая линия, задаваемая уравнение $y = 2x$, с выколотой точкой при $x=-1$.

Рис. 1. Задача вступительной работы Малого мехмата МГУ для 9-го класса

В работе приняло участие 93 ученика из более чем 60 школ (включая как государственные, так и частные; из Москвы и из некоторых близлежащих городов).

В 33 работах решение не представлено. Далее мы не будем рассматривать эти работы. В 16 работах верное решение. Остаются 44 работы, содержащие ошибки или неточности разного рода, более подробное рассмотрение которых и составляет предмет нашего исследования.

В соответствии с этапами решения ошибки можно разбить на 2 группы: совершенные на аналитическом этапе (преобразование выражений с учетом ОДЗ) и на этапе перехода от аналитического представления функции к графическому (построение графика). Здесь уместно вернуться к разговору про видимое и мыслимое, поскольку данное разбиение опирается на то, что видим, – фактические ошибки школьников (что сделано, что не сделано, что сделано неправильно). Но для избавления от ошибок нужно устранить их причины, которые являются мыслимыми и связаны с тем, что ученик не овладел некоторым потребовавшимся в данной ситуации средством или способом его применения. Последнее касается не только математического содержания по темам «функция», «выражения» и «графики»: проблемы могут быть связаны с самоконтролем (с проверкой учеником своих действий по ходу решения безотносительно к математике), то есть с управлением человеком самим собою (не с предметным, а с психическим уровнем развития, согласно [1, с. 44–50]). Далее мы укажем замеченные ошибки и постараемся сделать предположения об их причинах.

I. Ошибки на аналитическом этапе решения.

А. Не получено $2x$. Из тех учеников, кто правильно переписал условие задачи и решал ее, 13 человек не упростили выражение до $2x$ (здесь имеется в виду преобразование выражений без учета ОДЗ). Подробный анализ ошибок на данном этапе не входил в наши цели, но отметим, что они касались неправильного вынесения за скобки $x^2 + x + 1$ как общего множителя, неправильного применения или неприменения формулы суммы кубов и отсутствия скобок после упрощения первого множителя (в четырех работах, несмотря на то что скобки не поставлены, школьники далее совершают правильные действия, словно скобки есть, но в одном случае это повлекло ошибки). Последний недочет можно встретить и в работах, где решение верное.

У четверых школьников возникли трудности на последнем шаге при вынесении $2x$ за скобку: кто-то вместо этого поделил дробь на $2x$, кто-то после вынесения зачеркнул x, оставив лишь 2, кто-то ошибся в степени x внутри скобок после вынесения. Один ученик просто не вынес $2x$ как общий множитель, оставив выражение в виде $\frac{2x^{10}+2x}{x^9+1}$ (это не было осмысленным действием для того, чтобы не указывать ОДЗ, а именно ошибка, поскольку далее он не распознал в этой функции линейную и не нарисовал в качестве графика прямую).

Основная причина ошибок здесь кроется в том, что школьники не овладели предметным материалом, относящимся к преобразованиям выражений, поскольку совершают ошибки в соответствующих действиях. Однако если ученик ошибся при переписывании задания, но дальше совершил верные преобразования (был один такой школьник), то это указывает на отсутствие самоконтроля, выходящее за рамки данного раздела математики. Ситуации, когда ученик «не увидел» некоторую формулу, могут указывать как на то, что школьник ее не знает, так и на то, что он не распознал ее в этом конкретном случае. Последнее означает неполное ее освоение: если ученик воспринимает тождество как указание на действие с выражением, то совершить преобразование в обратную сторону у него не получится (для него это лишь операция, а не отношение) – здесь причина на предметном уровне; либо ученик способен совершить необходимые действия, но только после внешнего указания обратиться к соответствующему математическому содержанию – тогда проблема в собственном обращении к имеющемуся средству (формуле).

Б. Нет ОДЗ. В 24 работах не рассматривается ОДЗ или что-то, указывающее на нее. Около половины из них содержат правильное решение задачи для $y = 2x$, где на x нет ограничений.

В данном случае не получается различить две принципиально разные ситуации: 1) ученик в принципе не знает про ОДЗ, что ее нужно искать в таких задачах, и 2) ученик знает про ОДЗ, но, проделав необходимые действия в уме или черновике, совершил ошибку и решил, что в этой задаче она не нужна. Последнее, с одной стороны, указывает на пробелы школьников на уровне математики, но, с другой, на некоторое отсутствие контроля и проверки своих действий.

В. Неверная ОДЗ. Из тех учеников, кто рассматривал ОДЗ (хоть в каком-то виде), шесть допустили ошибки. Половина из них решила, что x может быть любым («$x^9 + 1 \neq 0 \rightarrow x$ – любое»), оставшиеся либо указали другое недопустимое значение, либо добавили к нужному что-то еще (например, «$x(x+1) \neq -1 \ \rightarrow \ x \neq -1, x+1 \neq -1$»).

Здесь ошибки, в первую очередь, указывают на недостатки при работе с выражениями, в частности, на то, что некоторые действия совершаются за границами их применимости (в последнем примере, как нам кажется, произошло перенесение способа решения уравнения $x(x+1) = 0$), но также отсутствует проверка своих действий.

II. Ошибки и недочеты на этапе перехода от аналитического представления к графическому.

В отличие от предыдущей группы ошибок, здесь их предметные причины не столь однозначны: есть ошибки, порожденные именно переходом от аналитического представления функции к графическому, а есть недочеты, которые связаны с построением координатной плоскости и графика в целом (с применением графических средств).

А. При верных аналитических преобразованиях отсутствует график в каком-либо виде. Из 8 человек, чьи работы относятся к этой категории, 6 допустили ошибки ранее и не получили $2x$, поэтому их ситуация понятна: выражение сложное – строить не буду. Двое оставшихся не строили график, хотя и получили $y = 2x$ (они не рассматривали ОДЗ).

Отсутствие графика функции может быть связано с ситуациями, когда школьник не знает, как осуществить переход к новому представлению (проблема со средствами перехода), когда он в принципе не понимает, что такое график (проблема с графическими средствами), или забыл, что от него требовалось что-то еще (связь не с функцией и ее представлением, а с проверкой своих действий).

Б. Четыре школьника не подписали оси. Причем за исключением этого один из них дал верное решение. На наш взгляд, данный недочет относится к графическому методу в целом, а его причина – в недостаточности необходимости, осмысленности для учеников этого действия: если горизонтальная ось графика всегда соответствует Ox, вертикальная – Oy, то указание осей несет не средствиальный, а лишь ритуальный характер (всегда так делали, значит, так нужно, хотя причины не ясны). Но может быть другая ситуация: ученик хотел обозначить оси, но забыл – тогда это относится к недостатку самоконтроля.

В. Как минимум трое при построении прямой по точкам допускают, что она проходит несколько в стороне от отмеченной(-ых) точки(-ек). Причем у одного школьника это привело к тому, что график прошел рядом с началом координат, хотя до этого он указал в таблице значений функции точку (0;0) (см. пункт 3 ниже). Данные действия могут являться как свидетельством того, что ученик в принципе недостаточно освоил графический метод, так и подтверждением того, что графическое представление аналитической формулы совершается неточно.

Г. Не выколота(-ы) точка(-и), с абсциссой(-ами) не из найденной ОДЗ. Есть 4 ученика, которые на первом этапе решения указывают: «x не равен [тому-то]» (двое нашли правильную ОДЗ, двое – нет, но суть в данном вопросе не меняется), затем проводят прямую через данную точку.

За этим недостатком могут скрываться две ситуации: 1) ученик в целом не знает, что это нужно отображать на графике прямой (графически не различает эту ситуацию и ситуацию с непроколотой точкой), 2) ученик понимает разницу, но у него нет способа отобразить это графически – он не знает, как показать, что значение окажется пропущено, поэтому рисует известную ему прямую. Также ошибка вновь может заключаться в забывании – в процессе решения школьник забыл, что написал ранее, тогда это имеет отношение к контролю своих действий. В целом, если ученик забыл что-то – это может указывать на то, что действия, которые он совершил, потребовали слишком много усилий, чтобы удержать необходимую информацию в памяти. Так, если при упрощении выражений учитывается ОДЗ, а на графике данная информация не указана, то таковыми являлись действия, направленные именно на построение графика.

Д. Неверно выколота точка, с абсциссой не из найденной ОДЗ. Есть четыре работы, где верно указана ОДЗ, то есть написано, что x не равен –1. Про соответствующую ординату замечания не представлены. В этих работах на прямой оказалась выколота не точка (–1;–2), а другая с той же абсциссой. В двух работах это следствие того, что вместо заявленного $y = 2x$ строили $y = \frac{x}{2}$ (см. следующий пункт). В одной – того, что график нарисован неточно (см. пункт В). То есть в этих случаях неверно выколотая точка лишь следствие неправильного графика, но теоретически возможна обратная ситуация, что из-за неверно определенной проколотой точки оказался построен неправильный график. В оставшейся работе график проходит через точки, правильно указанные в таблице значений, но выколота точка (–1;–1) (при этом он похож на прямую – такой дефект чертежа). Эту работу не удается с полной уверенностью отнести к одной из двух ситуаций.

Е. Построен в целом не тот график, что получился аналитически. Мы считаем, что причина этого заключается в неспособности школьников либо подставить в формулу, задающую функцию, значение переменной для нахождения ее значения, либо правильно изобразить результат графически (например, девятиклассники путают смысл координат точки). К двум ученикам, которые правильно получили $y = 2x$ (с ОДЗ), но строили $y = \frac{x}{2}$, добавляется еще один. В отличие от предыдущих он заполнил таблицу значений и подмена функции на $y = \frac{x}{2}$ или замена по смыслу x и y друг на друга прослеживается уже в ней. Возможно, данный случай относится к ошибкам при работе с формулами и выражениями, но, поместив его в данную группу, мы исходили из того, что таблица – это уже специальное средство перехода к графическому представлению, и поэтому ее использование – это и есть момент перехода от одного представления к другому. Немного остановимся на этом.

Таблица значений функции, которую заполняют ученики, – это не просто информация о функции в другом виде, это средство для построения графика. Есть 7 работ, в которых отмечается, что x не может принимать некоторое значение, но потом оно встречается в таблице с ординатой, соответствующей проколотой точке. Таким образом, для этих школьников указанные значения связаны не с самой точкой на графике, но помогают при его построении. В нашей выборке не удается выявить связь такого заполнения таблицы и проведения линии через ту точку, которую следовало бы проколоть, поскольку часть школьников после этого выколола точку на графике, а пара учеников – нет.

Шесть человек, которые в результате преобразования выражения получили нечто отличное от $y = 2x$, построили графики, не соответствующие полученным ими формулам (также есть ученик, получивший $y = \frac{1}{2x}$, но правильно построивший гиперболу по точкам). Эти случаи могут представлять интерес, поэтому рассмотрим их более подробно.

Один ученик получил $y = 2$ и продемонстрировал, что для него график «$y =$ число» – это точка (отметил только (0;2)). Трое получили некоторую рациональную функцию, после этого находили три точки, принадлежащие графику: один ученик подставлял приблизительные значения (вместо дроби целое число), второй допустил ошибки в таблице при нахождении значений функции, третий справился с составлением таблицы более точно. На графике по полученным точкам первый и второй нарисовали прямую, третий – ломаную. Один ученик получил многочлен 12-й степени, нашел его нули 0, –1 и 1 и построил график: некоторая неубывающая функция, которая принимает нулевое значение лишь на отрезке от –1 до 1. Школьник, который не совершил ошибок при преобразовании выражений, но не дошел до $2x$, пытаясь построить график по точкам (1;2) и (–1;–2), которую правильно выколол, провел кривую, похожую на кубическую параболу. То есть в единственной ситуации, где графиком рациональной функции являлась прямая, не стали соединять отмеченные точки отрезками. Мы видим, что, оказавшись в нестандартной ситуации, школьники могут найти некоторые точки, через которые проходит график, по значениям переменной (но на точность этих значений влияет трудность вычислений). А как дальше поступить с ними, какой линией соединить – это, скорее, дело случая.

Ж. График только в I четверти. Ученик, который заполнял таблицу значений для $y = \frac{x}{2}$, и еще один, не упоминавшийся ранее, при проведении прямой не выходили за рамки первой координатной четверти, хотя из аналитического решения второго следует, что он понимает ситуацию более широко (у него указана ОДЗ: $x \neq -1$). Причины этого могут касаться как средств перехода от аналитического представления к графическому, так и построения графика в целом.

З. График не проходит через начало координат. В так или иначе уже упоминавшихся работах четырех учеников приведены формулы, задающие функции, графики которых должны проходить через точку (0;0), но это игнорируется школьниками (то есть для них прохождение линии через начало координат не является средством контроля при переходе к графику). Это напрямую связано с тем, как происходит построение графика функции и графика линейной функции в частности, не в теоретическом рассуждении, а практически.

Прямая как идеальный геометрический объект задается двумя точками, но при построении конкретной прямой в результате проведения ее через две точки могут возникнуть неточности. Это вызвано тем, что сами реальные точки, через которые будет проведена прямая, не являются идеальными, а также тем, что человек не обладает идеальной точностью в своих действиях. Поэтому если есть три точки одной прямой, две из которых находятся рядом, а третья относительно далеко от них, то прямая, построенная человеком лишь по двум близким точкам, может не пройти через третью. В этой ситуации придется вернуться к началу и построить прямую по трем точкам для более точного результата. В этом случае третья точка, которая из теории лишняя для проведения прямой, становится средством контроля при ее построении (вроде и так подходит, и так – что же выбрать?).

При построении графика функции неточности, связанные с отметкой точек, предшествуют другим. Если координаты точки целочисленные (и небольшие по модулю), средством контроля является клеточная область, на которой строится система координат. Если координаты точек имеют более сложный вид (конечные десятичные дроби) и взять более удобные точки нельзя, то требуется изменить масштаб системы координат, единичный отрезок, поменять клеточную область.

При решении рассматриваемой задачи девятиклассники могли пользоваться только белой бумагой, на которой не было клеточной области, и рисовать систему координат предстояло им самим. При этом график функции при верных преобразованиях выражения строится по точкам, координаты которых целочисленные и которые расположены недалеко от начала координат: (0;0), (1;2), (2;4) и пр. Насколько школьникам в данной ситуации оказались нужны средства контроля?

Для изучения этого вопроса обратимся не только к рассмотренным выше работам, но и к тем, где было верное решение. Сразу отметим трудности, которые возникли при анализе решений. Не всегда возможно понять, сколько точек потребовалось девятикласснику для построения графика линейной функции: поскольку их подобрать несложно, школьники могли сразу отмечать точки на координатной плоскости, не строя таблицу значений; в случае если график функции проходит через начало координат, а связанные с этим записи отсутствуют, это могло являться как следствием правильного построения прямой, так и того, что ученик заметил это, держал в уме, но не отразил в тексте решения; в случае с проколотой точкой такая же ситуация: сначала отметили точку и построили график либо провели прямую, а затем указали точку.

Из 47 работ, в которых строилась так или иначе прямая, нам удалось отметить 24, где ясно, сколько точек потребовалось школьникам для ее построения. В 14 работах строили по двум точкам, в основном одна из них была началом координат. В семи работах – по трем точкам, в трех – по четырем точкам и более (7 учеников из этих 10 указали именно в таблице три и более значения). Примечательно, что, с одной стороны, есть три работы, где видно, что ученик сначала выписал таблицу для двух точек, а при построении графика добавил еще одну. В одной работе на чертеже осталась зачеркнутая первоначальная прямая. А с другой, есть пара работ, где прямую строили по двум точкам, отличным от начала координат, и график прошел несколько рядом с ним. В этих двух ситуациях оказалось явным образом представлено наличие/отсутствие умения в результате контроля возвращаться к формуле и вносить изменения на графике (в том числе умозримом графике, который ученик намечает построить на бумаге).

Мы показали, что часто за одной фактической ошибкой могут скрываться совершенно разные причины. Принципиально различные из них – это те, что касаются предметного материала, и те, что связаны с контролем своих действий. В нашей ситуации часто трудность установления, какие именно из этих причин вызвали ошибку, заключалась в том, что отсутствие необходимого действия ученика может указывать как на то, что он не знает или не освоил соответствующий материал, так и на то, что он не обратился к нему в данном случае, а также в том, что часть действий (правильных/неправильных) школьник мог совершать в уме. Поэтому нельзя лишь на основе анализа текста решения сделать вывод о неосвоенных детьми средствах и способах. Для того чтобы увидеть, какие пробелы есть у учеников по существу, необходимо перейти от констатирующего исследования к построению специального эксперимента.

Для исключения из рассмотрения в диагностике ошибок, соответствующих аналитическому этапу решения, конечно, можно предложить аналогичную задачу с уже упрощенной формулой. Можно в задачах на построение графика требовать указать в ответе ОДЗ функции. Это сделает более ясными причины для ситуации, когда особая точка оказалась не выколота, но ошибки, относящиеся к самоконтролю, по-прежнему возможны.

Для того чтобы исключить ошибки по причине отсутствия самоконтроля (и оставить те, что вызваны предметными проблемами), можно в таком эксперименте обеспечить его внешним для школьников образом: дать аналогичное задание с «чек-листом» (материальным списком для проверки своих действий). Например, следующего вида:

- проверьте, что вы правильно нашли ОДЗ (подставьте значения x не из данной области в формулу и убедитесь, что она некорректна);
- проверьте, что вы правильно преобразовали выражение (для нескольких значений x вычислите, что получится по исходной формуле и по той, что вы получили);
- проверьте, что вы правильно отметили точки графика функции;
- проверьте, что вы правильно провели график функции (для нескольких точек графика проверьте соответствующие значения формулы);
- проверьте, что график соответствует найденной вами ОДЗ.

Если с «чек-листом» ученик решает задачу верно, а без него совершает ошибки, то причина их явно кроется не в предметных пробелах. Заметим, что наличие данного «чек-листа» у школьника не позволяет дать в таком виде задачу ни на контрольной, ни на отборочной работе, а потому мы остановимся пока на том, что лишь зафиксируем необходимость специального исследования для решения вопроса о различении причин (предметных и самоконтроля).

Для выявления проблем, которые относятся к графическому методу в целом, а не к переходу от одного представления к другому, можно дополнительно к диагностике предложить серию задач, где от учеников требуется перерисовать, сделать самостоятельно «копии» некоторых графиков. Если при этом совершаются такие недочеты, как отсутствие указания осей или построение графика лишь в I координатной четверти, то их причина не относится к переходу от формулы. Для фиксации и восполнения данных пробелов самими школьниками можно организовать выполнение такого задания в социально-игровой форме: один делает «копию» графика, передает без дополнительной информации это изображение другому, который по нему должен найти исходное из определенного множества картинок, в котором представители подобраны так, чтобы «отловить» существующие недочеты (например, такой же график, где поменяли местами оси); когда выбор сделан, преподаватель сообщает, верен ли он, после чего оба ученика имеют возможность обсудить, почему не удалось справиться с заданием и что нужно исправить.

Анализ действий обучающихся, связанных с переходом от графического представления функции к аналитическому

Второе направление исследования было ориентировано на итоговый результат обучения в школе. Какие действия в реальности совершают люди, которые уже изучили школьный курс математики, в ситуации, когда им нужно задать формулой несложную функцию, график которой дан? Какие ошибки они допускают, какие трудности у них возникают при этом? Для этого будет уместно рассмотреть, как с этим будут справляться студенты нематематической специальности, – это покажет, что на самом деле усваивает из школьной программы тот, кто изучал математику на общем уровне. Здесь мы эмпирическое исследование провели уже в коммуникативной форме, чтобы была возможность увидеть не только результат выполнения тех или иных действий, но и соответствующий процесс.

Для этого в рамках семинарских занятий по теории вероятностей и математической статистике для студентов II курса НИУ ВШЭ факультета биологии и биотехнологии была предложена задача, при решении которой требовалось перейти от графического представления функции к аналитическому – по графику (рис. 2) написать формулу, задающую эту функцию.

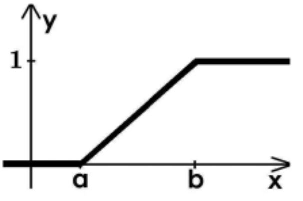

Рис. 2. График функции распределения

Задание было предложено в двух группах, в которых было по 10–15 студентов. Один из них выходил к доске, а остальные давали свои советы с места. Преподаватель же в процесс практически не вмешивался, ожидая, когда группа закончит обсуждение и представит свой ответ либо зайдет в тупик. В обеих группах человек у доски понимал, что следует отдельно рассматривать три промежутка, и быстро сообразил, что именно будет при $x < a$ и $x > b$ (такое им недавно встречалось). На доске появилась запись кусочно-заданной функции, где отсутствовала вторая строка, это означало, что при определении формулы при значениях x из промежутка между a и b возникли затруднения. Приведем протоколы дальнейших обсуждений.

Первая группа.

1) Человек у доски неуверенно пишет во второй строке: «$b - a$» со словами: «Функция ведь линейная».
2) Кто-то из студентов из аудитории подсказывает, что, если функция линейная, то должно быть «x», с ним соглашаются. Во второй строке (соответствующей $a < x < b$) пишется «x».
3) Другой студент замечает: «x проходит через 0, а здесь a», и предлагает заменить «x» на «$x - a$», с ним соглашаются. Выражение во второй строке исправляется на «$x - a$», часть студентов дает такой ответ, другая – в замешательстве и не может ничего предложить. Обсуждение останавливается, студенты не могут совершить дальнейшее продвижение своими силами.
4) Вмешивается преподаватель. Он обращает внимание на то, что данная функция действительно линейная и проходит через точку (a;0), но не проходит через точку (b;1). Один из студентов замечает, что при указанных на доске промежутках эта точка относится к другому случаю, поэтому проблемы нет. На это преподаватель замечает, что можно отойти от значения b чуть влево по оси x или взять середину отрезка [a;b] – проблема останется. Задается вопрос, что требуется изменить в формуле, чтобы прямая проходила должным образом.
5) Студенты нерешительно высказывают предложения: сделать так, чтобы a и b стали подходящими для нашей формулы; человек у доски произносит слово «деление».
6) Преподаватель акцентирует на этом внимание и просит этого студента написать, что он думает. Студент неуверенно исправляет «$x - a$» на «$\frac{x-a}{x-b}$».
7) С помощью наводящих вопросов преподавателя и помощи аудитории совершается переход к нужной записи.

8) Преподаватель обращает внимание на то, почему это верно, напоминает материал о связи уравнения прямой и ее графика.

Вторая группа.

1) Человек у доски думает, что написать. Кто-то из студентов подсказывает, что функция линейная, поэтому должно быть «x», с ним соглашаются. Во второй строке (соответствующей $a \leq x \leq b$) пишется «x».
2) Происходит обсуждение, в котором студенты предлагают свои версии: кто-то говорит что-то про угол наклона и поэтому предполагает, что должно быть «$\frac{x}{2}$», кто-то предлагает «$x + a$», но в результате соглашаются, что нужно «$x - a$». Это исправление и вносится в формулу. Группа дает такой ответ. Обсуждение останавливается, студенты не могут совершить дальнейшее продвижение своими силами.
3) Вмешивается преподаватель. Он обращает внимание на то, что данная функция действительно линейная и проходит через точку (a;0), но не проходит через точку (b;1); задает вопрос, что требуется изменить во второй строке, чтобы прямая проходила должным образом.
4) Студенты нерешительно высказывают предложения: «поменять знаки»; человек у доски произносит слово «деление».
5) Преподаватель акцентирует на этом внимание и просит этого студента написать, что он думает. Студент пишет во второй строке «$\frac{x-a}{b}$».

Последние два пункта повторяют окончание предыдущего протокола.

Мы видим, что даже для линейной функции задача на переход от графического представления к аналитическому для студентов оказывается задачей исследовательского типа: у них нет готовых средств (знаний и умений) для ее решения; имеющихся хватило только для выдвижения предположений, но верный ответ так и не был получен без помощи преподавателя.

Действия, которые совершали студенты, отражают идею возвращения к предыдущему представлению и в общем виде могут быть описаны так: на графике замечена линейная функция, значит, в формуле пишется x; возвращение к графику и соотнесение того, что получено и что дано в условии, приводит к осознанию необходимости изменений; происходит понимание того, что прямая проходит через точку a на оси абсцисс, значит, нужно внести соответствующее изменение в формулу, дальнейшее продвижение к решению осуществляется подбором.

Предложения, связанные с проведенным исследованием

Рассмотренные в предыдущих разделах задачи хотя и были несколько сложными (это следствие требований ситуаций, в которых они были предложены: на отборочной работе задача не должна быть стандартной для школьников, на семинарах по теории вероятностей рассматриваются лишь определенные функции), но это не мешало нам в движении к заявленной цели – анализу действий обучающихся, совершаемых ими при переходе от одного представления функции к другому. Обе задачи были связаны с функцией простого вида – линейной, поэтому он не создавал дополнительных проблем для школьников и студентов. В каждой был некоторый нюанс: в первой пришлось выколоть точку на графике, во второй формула соответствовала лишь определенному числовому промежутку. Но эти тонкости присутствуют не в отдельном соответствующем мыслительном средстве (графике и формуле), а в функции как в результате их соотнесения. На самом деле прямую и прямую с выколотой точкой внешне человеческий глаз не различает: на графике специально отмечается полый кружок или сходящиеся стрелочки, чтобы показать отсутствие данного значения для функции, но это не элемент графика, а некоторый знак. Запись кусочно-заданной функции по сути означает, что есть несколько формул (область определения каждой задается ее видом), но специально вводятся ограничения и происходит обращение к нужной, исходя из промежутка значения переменной.

На данном этапе исследования мы не готовы предоставить готовую методику – мы предлагаем содержание (в смысле [2], то есть не материальное или предметное содержание, конкретные задачи, а то, что за ними стоит, то, что в процессе обучения следует мыслить за понятием функции и в соответствии с этим выстраивать этот процесс), локальные цели (для чего ученик должен совершать то или иное действие с формулой или графиком), хотим наметить пути построения методики по освоению обучающимися действий, направленных на осуществление переходов между представлениями. Исследование привело нас к некоторым соображениям относительно последнего. Пока ограничимся лишь линейной функцией. Начнем с предложений, относящихся к развитию средства-формулы.

1) В начале обучающимся предлагается задание следующего типа: на общее рассмотрение вынесены 2 формулы, скажем, $y = (2x - 4) : 2$ и $y = x - 2$, спрашивается, являются ли эти записи одинаковыми; задают ли данные формулы одинаковые действия с x. Выясняется, что формулы разные (нет равенства ни в знаках, ни в указаниях на действия). На этом делается акцент. Но при упрощении выражений получается тождество правых частей. Что это означает, что же тогда равно? Одинаковым оказались изначально невидимые отношения, задаваемые этими формулами.
2) Далее предлагается серия задач, где требуется проверить по формулам равенство задаваемых ими отношений (например: $y = (3x - 9) : 3$ и $y = x - 3$ (да), $y = 4x + 5$ и $y = (3x + 1) + (x + 3)$ (нет)). Это соответствует освоению нового способа.
3) В некоторый момент обучающиеся должны выйти за границы его применимости. Например, им может быть предложена задача, где одна формула $y = x$, а другая описана словами: «формула выражает линейную зависимость y от x, если в нее подставить $x = 0$, то получится $y = 0$, если $x = 1$, то $y = 1$». Поскольку выражение не дано, предыдущий способ не работает. Выйти из данной ситуации позволяет построение графиков функций и сравнение полученных прямых. После этого следует серия соответствующих задач. В итоге обучающийся должен владеть двумя способами и осознавать, с одной стороны, их эквивалентность, а с другой, какой способ предпочтительнее в той или иной ситуации.
4) Дальнейшее развитие связано с разрешением следующего противоречия. Например, предлагается аналогичная задача для формул $y = (2x - 2) : (x - 1)$ и $y = 2$. Обучающиеся при совершении преобразований выражений пока не рассматривали ОДЗ, поэтому этот способ приводит к утвердительному ответу. Но попытка построить графики ведет к конфликту (можно ли подставить в изначальную формулу $x = 1$?). В этот момент для его разрешения вводится ОДЗ, а для отображения этого на графиках – обозначения выколотых точек.

В действительности возможна обратная ситуация: на первом этапе обучающиеся могут построить график линейной функции, но испытывают трудности при преобразовании выражений. Тогда ответ, что общим для формул является график, не удовлетворителен. Нужно ставить вопросы о том, что означает совпадение графиков, что за этим стоит, тем самым совершая переход к равенству отношений. Это важно потому, что само по себе совпадение графиков оказывается бессмысленным в тех ситуациях, когда их построить сложно или невозможно. Выход за границы применимости способа возможен благодаря рассмотрению пар формул вида: $y = 123{,}123x + 987{,}65$

и $y = (246{,}246x + 2 \cdot 987{,}65):2$. Здесь совершить преобразование гораздо проще, чем пытаться построить графики по точкам.

Приведем теперь предложения, относящиеся к развитию средства-графика.

1) Обучающимся предлагается серия задач, где созависимость x и y задана графически: в координатной плоскости проведена прямая, требуется по значению одной величины найти значение другой. На начальном этапе значения подобраны так, что их легко указать по изображению. Например, предложен рисунок, на котором система координат и линия, соответствующая графику линейной функции $y = \frac{x}{2}$ при x немного меньше 0 и больше 4 (но сами формулы отсутствуют); требуется определить значения y при $x = 4$ и x при $y = 1$. На данном этапе обучающиеся учатся воспринимать прямую как способ задания отношения между величинами и применяют только графический способ.
2) На следующем этапе происходит расширение границы предыдущего способа: значения подобраны так, что нарисованная часть прямой через соответствующие точки явно не проходит, но ее несложно продлить. Скажем, в приведенном примере требуется найти значения y при $x = 6$ и x при $y = -1$.
3) Ситуация, когда предыдущий способ неприменим, – случай слишком больших значений для их поиска графически (найти значение y при $x = 100$). Возникает необходимость в новом способе решения, а именно в фиксации данного отношения в виде формулы.
4) Предлагается серия задач, где требуется по прямой, заданной в координатной плоскости, записать соответствующую формулу (случай вертикальной прямой возникает как проблемная ситуация, поэтому рассматривается отдельно). Используются теоретические замечания, что для проведения прямой достаточно двух точек, поэтому для однозначного задания соответствующей созависимости в виде формулы также необходимы и достаточны две точки. На начальных этапах их выбор осуществляется с помощью подсказки в условии или преподавателя, но на более поздних этапах должен осуществляться обучающимися самостоятельно. Поскольку сразу общая формула для линейной функции, как мы выяснили в предыдущем разделе, может не осознаваться, имеет смысл рассмотреть несколько случаев: прямая, явно проходящая через начало координат (рассматриваются (0;0) и точка вида (a;ka), выводится формула $y = kx$); прямая, проходящая через точки (a;0) и ($a + b$;b) (формула $y = x - a$); прямая, проходящая через точки (a;0) и (b;1) ($y = \frac{x-a}{b-a}$); и пр. На последних этапах происходит соотнесение формул по принципу частное – общее, на основании этого выводится общая формула, где коэффициенты уже связаны с определенным графическим смыслом.

После того как линейная функция, связь ее представлений будет освоена, имеет смысл перейти к рассмотрению кусочно-заданных линейных функций. На начальных этапах можно предложить задачи, формулировка которых призвана показать, что кусочно-заданная функция – это не искусственная конструкция, а связана с жизнью. Приведем пример такой задачи. *Велосипедист первый час ехал со скоростью 6 м/с, после этого он резко сбросил скорость и далее ехал со скоростью 4 м/с. Отразите зависимость пройденного расстояния от времени графически. Как еще можно задать данную зависимость?* Попытка записать формулу в данном случае приводит к проблемной ситуации для обучающихся. Но благодаря знакомству с ОДЗ им уже известно, что для указания зависимости нужно учитывать не только формулу, но и ограничения на множество подставляемых в нее значений. Поэтому запись кусочно-заданной функции как указание на соответствующую формулу в зависимости от промежутка служит выходом из проблемной ситуации.

По мере усложнения кусочно-заданных функций появляется необходимость в таблице значений как в средстве для осуществления перехода от одного представления функции к другому: если в координатной плоскости без самопересечений проведена некоторая ломаная, в которой много звеньев, то в таблице указываются значения, соответствующие вершинам, и по ним происходит переход к аналитическому заданию; если требуется построить график кусочно-заданной функции, которая задается на большом числе промежутков (на каждом определена линейная функция), то в таблице значений фиксируются координаты точек, через которые будут проходить соответствующие отрезки и лучи.

Заключение

Еще раз отметим, что в наблюдаемых ситуациях прослеживается общая идея: переход от одного представления к другому оказывается связан не с действием, выполняемым по алгоритму, а с установлением отношения, которое осуществляется неоднократным обращением к исходному представлению для соотнесения, корректировки и внесения изменений в другом, строящемся по нему. На наш взгляд, в методике это должно быть учтено более явно, без расчета на то, что это разумеется само собой, и применено для предотвращения затруднений учеников, отмеченных в данной статье, для лучшего изучения ими понятия функции как математического мыслительного средства, служащего для работы с отношением между переменными величинами, и для более глубокого освоения взаимосвязей между ее аналитическим и графическим представлениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В.* Деятельностная педагогика: Схемы педагогического мышления: учеб. пособие. М.: МАКС Пресс, 2020. 352 с.
2. *Боровских А. В.* О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств // Вестн. Московского ун-та. Сер. 20: Педагогическое образование. 2024. Т. 22, № 2. С. 61–82.

REFERENCES

1. Borovskikh A. V. *Deyatelnostnaya pedagogika: Skhemy pedagogicheskogo myshleniya: ucheb. posobie*. Moscow: MAKS Press, 2020. 352 p.
2. Borovskikh A. V. O soderzhanii shkolnogo matematicheskogo obrazovaniya. Ot soderzhimogo k soderzhaniyu: matematika kak sistema myslitelnykh sredstv. *Vestn. Moskovskogo un-ta. Ser. 20: Pedagogicheskoe obrazovanie.* 2024. Vol. 22, No. 2, pp. 61–82.

Лисицын Михаил Денисович, ассистент кафедры математического анализа механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; аспирант Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: lismihail40rus@gmail.com

Lisitsyn Mikhail D., Assistant, Calculus Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; PhD Post-graduate Student, Lomonosov Moscow State University

e-mail: lismihail40rus@gmail.com

Статья поступила в редакцию 27.01.2025
The article was received on 27.01.2025