

УДК 372.851
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/1819-463X-2025-4-197-208

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания

О ПОНЯТИИ ФУНКЦИИ И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ. ЧАСТЬ 1^{1, 2}

М. Д. Лисицын

Аннотация. Статья затрагивает проблему содержания и изложения материала, связанного с понятием функции, в школьном курсе математики. Оформившийся в методике способ ее решения (совмещение «генетического» и «логического» подходов) в действительности не позволяет устранить изолированность общего понятия и частных видов функций (в конкретной ситуации требуется обращение либо к первому, либо ко второму, но тогда связь между ними теряется). Предлагается при изучении функции больше внимания уделять тому, для чего она нужна в рамках учебного процесса. Для этого следует рассматривать формулу и график как разные мыслительные средства, служащие для выражения отношения между переменными величинами, а функцию как результат их соотнесения, выстраивания отношений между ними. Такой подход позволяет по-новому взглянуть на причины актуальных проблем школьников, возникающие при переходе от одного представления функции (аналитического или графического) к другому. С целью выяснения того, что могут сделать обучающиеся фактически при осуществлении этого перехода, были проведены два исследования. В результате первого, проходившего в рамках вступительной работы Малого мехмата МГУ, были выявлены не только ошибки школьников, возникшие при переходе от формулы к графику функции, но и невозможность более глубокого выяснения их причин без анализа имеющихся у учеников мыслительных средств (связанных с математическим содержанием либо самоконтролем). Второе исследование, которое проводилось среди студентов-нематематиков Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», показало, что задача на определение формулы по графику даже несложной функции оказалась для выпускников школ сродни исследовательской. Общим в исследовании являлось неоднократное обращение обучающихся к изначальному представлению функции

¹ Первая из двух статей по представленной теме.

² Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю доц. А. В. Бегунцу за помощь в работе и проф. А. В. Боровских за полезные замечания и предложения.

© Лисицын М. Д., 2025



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

для корректировки нового, что указывает на присутствие в данной ситуации сложной связи (отношения), выходящей за границы единичной операции. На основе сделанных наблюдений сформулированы методические предложения.

Ключевые слова: методика преподавания, понятие функции, мыслительные средства, аналитическое представление функции, графическое представление функции, переход между представлениями.

Для цитирования: Лисицын М. Д. О понятии функции и ее аналитическом и графическом представлениях. Часть 1 // Наука и школа. 2025. № 4. С. 197–208. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-4-197-208.

ON THE CONCEPT OF FUNCTION AND ITS ANALYTICAL AND GRAPHIC REPRESENTATIONS. PART 1

M. D. Lisitsyn

Abstract. *The article addresses the problem of the content and presentation of the material related to the concept of function in the school mathematics course. The method of solving it in the methodology (combining the “genetic” and “logical” approaches) is not eliminating the isolation of the general concept and certain types of functions (in a particular situation, it is necessary to use either one or the other, but then the relationship between them is lost). When studying function, it is suggested to pay more attention to what it is needed for in the learning process. To do this, formula and graph are considered as different mental means used to express the relationship between variables, and function as the result of their correlation that arises when constructing relationships between these means. This approach gives us a new perspective on the causes of the current problems schoolchildren have with the transition from one representation of a function (analytical or graphic) to another. Two studies were conducted with the aim to find out what students can actually do during these transitions. The first one, which took place as part of the entrance exam for school students to the Lomonosov MSU Junior department of mechanics and mathematics, revealed not only the factual mistakes of nine-graders which arose when switching from the formula of the function to its graph, but also the impossibility of understanding their causes in more depth without analyzing the students’ mental means (related to the mathematical content or self-control). The second study, which was conducted among non-mathematical students at HSE University, showed that the task of defining the formula according to the graph of a linear function is similar to research for school graduates. What both studies have in common is the repeated reference of students to the original representation of the function in order to correct the new one, which indicates the presence of a complex connection (relationship) that is beyond the boundaries of a single operation. On the basis of these studies, methodological proposals are presented.*

Keywords: *teaching methodology, the concept of function, mental means, analytical representation of a function, graphic representation of a function, the transition between representations.*

Cite as: Lisitsyn M. D. On the concept of function and its analytical and graphic representations. Part 1. *Nauka i shkola*. 2025, No. 4, pp. 197–208. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-4-197-208.

Вступление

Понятие функции является одним из важнейших в курсе алгебры 7–9-х классов. Оно воплощает идею функциональной зависимости, служит основой для начал математического анализа старшей школы и дисциплин высшей математики. Данное понятие является сложным для усвоения хотя бы потому, что связано с понятиями линейной функции, квадратичной функции и пр., которые, с одной стороны, являются лишь частными случаями более общего понятия, но, с другой стороны, в своей совокупности оказываются достаточными для большинства школьных задач, вследствие чего общее понятие функции оказывается не содержательным. Как организовать соотношение этих частных случаев и общего понятия «функция» в процессе обучения? В методике оформились два подхода рассмотрения функции в школьном курсе математики, которые предлагают два практически противоположных способа ответить на этот вопрос.

Демонстрацией первого подхода, называемого иногда «логическим», может являться отечественная учебная литература 1970-х гг., когда преподавание школьной алгебры, и в частности темы, посвященной понятию функции, стало опираться на теоретико-множественные основы ([1; 2, с. 7–12; 3]). При этом подходе функция трактуется максимально близко к отображению между произвольными множествами, ключевыми для нее становятся понятия упорядоченной пары и отношения, применяются графы со стрелками между элементами. Утверждение, что данный подход характеризуется движением от общего к частному, от более абстрактного к более конкретному, верно, но лишь отчасти. Материал, посвященный функции как более абстрактному понятию, действительно, излагается до знакомства с конкретными видами числовых функций, но их изучение на него не опирается. Оно связано с опорой на наглядность и с постепенным повышением формализации от класса к классу. Последнее означает, что сначала свойства функции устанавливаются, исходя из ее графика, но со временем и свойства, и вид графика начинают следовать из аналитических рассуждений, при этом повышается строгость в изложении материала.

Второй подход, называемый «генетическим», опирается на использовавшиеся до середины XIX в. понятия переменной величины и функциональной зависимости переменных величин. С учетом того, что школьники работают с числовыми функциями, причем зачастую ограничиваясь лишь их определенными видами, данный подход оказывается полезен в силу своей простоты, но отсутствие теоретико-множественной базы не позволяет сформировать более современное и строгое понятие функции у школьников [4, с. 151–168].

Сложившаяся ситуация, которую можно описать цитатами: «генетический подход оказывается недостаточным для формирования функции как обобщенного понятия... логический обнаруживает определенную избыточность», а поэтому «в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функция. Одновременно учитывается все ценное, что можно извлечь из логического подхода» [4, с. 155], продолжается почти 40 лет: нечто подобное можно встретить и в современных методических пособиях ([5, с. 256–267]), и в опубликованных совсем недавно статьях (например, [6; 7]). Указывает ли это если не на то, что данная проблема решена, то хотя бы на наличие методической однозначности? Отнюдь.

Если обратиться к современным учебникам по алгебре 7–9-х классов, то легко можно заметить, что в них последовательность разделов, связанных с понятием «функция», и логика их изложения принципиально отличаются.

- В линии учебников Ю. Н. Макарычева [8–10] сначала в 7-м классе предполагается некоторое знакомство с функцией как функциональной зависимостью, областью определения (без множеств), формулой и графиком. После этого происходит изучение линейной функции, в дальнейшем – параболы. В 8-м классе предполагается знакомство с другими видами функций (оказываются заданы обратная пропорциональность, корень), повторение общего понятия функции и рассмотрение новых свойств (связанных с графическим представлением) и характеристик, а затем – расширение с их помощью представлений об известных видах функций. В 9-м классе: сначала происходит повторение и рассмотрение новых общих свойств, затем – более подробное изучение квадратичной функции и ее графика.
- В серии А. Г. Мордковича [11–13] в 7–8-х классах происходит сосредоточение на отдельных видах функций (хотя в конце 7-го класса также уделяется внимание тому, что обозначает запись $y = f(x)$), а более общее рассмотрение происходит в 9-м классе. Это обуславливается желанием авторов сначала сформировать у учеников некоторый «багаж знаний» [13, с. 124] и лишь затем ввести формальное определение.
- В учебниках С. М. Никольского, М. К. Потапова [14–16] авторы стремились посвятить 7-й класс изучению алгебраических выражений, функции в нем не рассматриваются, как менее доступные в данном возрасте. Им в основном посвящен 8-й класс: сначала вводятся формальное определение функции и ее график в общем, затем рассматриваются простейшие функции конкретных видов, но лишь спустя некоторое время они разбираются более подробно.

Методические расхождения, продиктованные тем, что у каждого авторского коллектива имеются свои основания при выборе материала и его изложения в том или ином виде, оказываются не устранены принятым совмещением «генетического» и «логического» подходов. По сути данные расхождения продиктованы необходимостью разрешить конфликт между дидактическими принципами доступности и научности: от материала требуется соответствие одновременно и возможностям учеников, и современным научным представлениям. Но причина, по которой вводится общее понятие функции, не должна следовать из последнего принципа чисто формально. Оно должно быть освоено школьниками как средство, инструмент для решения некоторой проблемы. Поэтому изолированность общего понятия функции и конкретных ее видов не преодолеть лишь путем перестраивания материала, поскольку при этом абстрактное понятие по отношению к простейшим функциям остается не инструментальным: задачи, относящиеся к конкретным видам функций, не требуют обращения к общему понятию, задачи же, касающиеся общих идей, наоборот, не связаны с частностями. Мы замечаем, что сложившаяся ситуация указывает на необходимость другого основания в методике (вместо «логического» и «генетического» подходов, их совмещения), из которого следует исходить при выстраивании линии изучения функции.

В связи с этим будет полезно обратить внимание на относящиеся к данной теме ошибки, которые фактически совершают школьники, поскольку их анализ может не только подтвердить наличие проблем, не отраженных в методических представлениях, но и подсказать направление поиска отмеченного основания. Из публикаций на эту тему за последние пять лет в более чем десятке статей данные ошибки рассматриваются в контексте решений заданий ГИА или готовности выпускников к учебе в вузах. Наиболее часто встречающиеся проблемы оказываются связаны с построением, анализом и преобразованием графиков функций, то есть с переходами

от аналитического представления функции к графическому и обратно. В некоторых публикациях также отмечается, что школьники овладели лишь определенными действиями с графиками и формулами, но сами по себе они недостаточны для владения функцией как сформированным понятием.

Более подробное описание некоторых проблем можно найти, например, в статье [17]. В ней также предлагаются методические пути их решения, которые хоть и связаны в первую очередь с подготовкой учащихся к успешной сдаче ОГЭ по математике, но могут быть рассмотрены в более широком контексте. Разберем некоторые из данных предложений подробнее.

- *Реализовать единый подход при изучении каждого вида функции.* Идея некоторого единообразия при изучении функций находит свое место и в учебниках [8–16], и в исследованиях (идея инварианта, универсального для изучения любого вида функций, при модульном обучении присутствует в диссертации [18]). Но наличие проблемы указывает на то, что в общем случае этого недостаточно; это более указание на форму, чем на содержание.
- *Использовать прикладные компьютерные программы для построения графиков функций, решения задач и визуализации процесса решения.* За последние лет пять в десятке работ также авторы предлагают использовать различные современные цифровые и компьютерные средства при изучении функции. Но в основном это связывается с повышением мотивации школьников, экономией времени и большей наглядностью. Прежде, чем прокомментировать это и другие замечания, нам необходимо представить свои соображения в связи с описанной проблемой.

Функция как математическое мыслительное средство

Обратим внимание, что указанные в предыдущем разделе подходы не фиксировали проблему соотношения между собой разных способов задания функции как центральную и не рассматривали общее понятие функции в качестве средства решения именно этой проблемы (хотя разные способы задания функции, конечно, присутствовали).

На наш взгляд, продуктивным в связи со сложившейся ситуацией может быть смещение акцента с того, что школьнику сообщают некоторый взгляд на понятие функции, на то, что он осваивает функцию как мыслительное средство. При этом вопрос о том, в соответствии с каким подходом следует изложить соответствующий материал, сменяется вопросами о том, что есть функция как мыслительное средство, зачем оно нужно и когда его введение необходимо. Далее мы постараемся ответить на них, но перед этим поясним, что мы понимаем под мыслительным средством.

Развитие по Л. С. Выготскому связано с овладением человеком новым средством для выхода из проблемной ситуации – ситуации, для разрешения которой имеющихся у него средств было недостаточно. В контексте образования это означает, что развитие ученика не происходит, если процесс обучения сводится только к его знакомству с новыми объектами и допустимыми действиями с ними без учета того, зачем это нужно, какую проблему (для обучающегося в конкретный момент) они решают, что позволяют сделать ученику такого, чего он раньше не мог. Так, например, *цифра* как математическое средство позволяет перейти от счета материальных (и материализованных) предметов к соответствующим действиям в знаках. Но цифр мало, счет ими ограничен, поэтому требуется новое средство – *число*. *Неизвестная величина и уравнения* необходимы, когда в задаче известны

результат и промежуточные действия, но выстроить обратный ход, решить ее только с привлечением арифметики не получается. Без *геометрических идеальных фигур* соответствующий раздел математики лишился бы доказательств, превратившись в скопление частных результатов измерений конкретных реальных фигур. В теории вероятностей до введения *множества элементарных исходов* были не ясны причины парадоксов по типу Бернулли. Эту цепочку примеров, показывающих средствиальный характер математических объектов, можно продолжить. Данные математические средства связаны, в первую очередь, с тем, как человек мыслит: удерживает ли он знаковое отношение (денотат-коннотат), когда выполняет операции в той или иной знаковой системе; оперирует ли он с фигурой, которая нарисована, или же выполняет мысленные действия с идеальным объектом, для которого нарисованная фигура лишь приблизительный образ этого объекта; что для него есть равновероятные события и может ли он соотносить множество и его элементы. То есть математические объекты и конструкции – это мыслительные средства (более широко данный вопрос освящен в [19]).

Будет уместным указать на различие видимого и мыслимого, сделаем это в контексте понятия «функция». Функциональная зависимость (на школьном уровне) – изменение одной величины в зависимости от другой – является мыслимой, а не видимой: в конкретной ситуации мы можем наблюдать изменение числовых показаний некоторого прибора, но саму связь между числовыми данными не видим. Только когда она представлена в виде графика или в виде формулы, эта зависимость становится «осознаваемой», доступной оперированию и рассуждению. Поэтому *и формула, и график – это мыслительные средства, позволяющие представить отношение между переменными величинами.*

Мы вновь употребили слово «отношение», остановимся подробнее на том, что под этим подразумеваем. Отношение между некоторыми объектами – определенная связь между ними. С одной стороны, оно противопоставляется операции, поскольку указывает на не одностороннюю связь, с другой стороны, в нем удерживается несколько действий, другими словами, конкретная операция становится некоторым практическим проявлением отношения.

Например, часть школьников может воспринимать запись « $a + b = c$ » как операцию, а другая часть – как отношение. Первые видят здесь лишь руководство к действию: сложи a и b и получишь c , при этом для них запись « $c - b = a$ » указывает на другую операцию. Вторые мыслят « $a + b = c$ » как отношение между a , b и c , при этом для них операции сложения слагаемых в другом порядке и вычитания из c одного слагаемого для нахождения другого уже присутствуют в этой записи. Как следствие, вторые воспринимают таблицу сложения как таблицу отношений, а первые – как таблицу операций, поэтому для вычитания им потребуется другая таблица.

Аналогичная ситуация в геометрии: треугольник может восприниматься как картинка (уже нарисованная или которую нужно нарисовать) или как отношение между его элементами как непосредственно заданными, так и неявно присутствующими, которые могут появиться при дополнительных построениях. Например, точка пересечения медиан, даже если ее специально не отметили, в любом случае присутствует как мыслимый объект, который одновременно определяется конкретным треугольником и в какой-то мере определяет его, а не является лишь результатом некоторых действий.

В теории вероятностей тот факт, что при двух независимых бросаниях идеальной монеты вероятность выпадения двух орлов равна $\frac{1}{4}$, может быть не связан, а может

быть связан с осознанием зависимости найденной вероятности от идеальности монеты (вероятность равна $\frac{1}{4}$, но лишь при условии, что вероятность выпадения орла при единичном бросании равна $\frac{1}{2}$). Тогда в данной ситуации можно подходить к вопросу о связи, отношениях разных вероятностей между собой.

Вне школьной программы также есть примеры математических отношений: дифференциальные уравнения задают отношение между функциями; аналогично приведенному выше примеру со сложением таблица неопределенных интегралов может восприниматься студентом как таблица операций, а может как таблица отношений между функциями и классами функций; курс аналитической геометрии служит для выстраивания отношения между аналитическим и графическим/геометрическим представлениями (это имеет нечто общее с рассматриваемой нами проблемой в контексте изучения функции на уровне школьного образования).

И в нашем случае – если школьник воспринимает функцию исключительно как правило, алгоритм: по x получить y , то он мыслит за ней не отношение, а некоторую операцию или последовательность действий (вычисление значения квадратичной функции при заданном значении переменной, нахождение корней квадратного уравнения или определение координат вершины параболы). Более сложные двусторонние связи при этом оказываются не освоенными учениками и недостаток этого мы фиксировали среди обнаруженных проблем в предыдущем разделе.

Для данных мыслимых отношений нужны соответствующие средства – это формулы (аналитическое представление) и графики (графическое представление). Каждое из данных средств позволяет мыслить отношения, взаимосвязи между переменными числовыми величинами, но при этом обладает своими особенностями. Например, для формул более естественны ограничения области определения (не могут быть записаны ноль в знаменателе и отрицательное число под корнем), а для графика функции, как частного случая произвольной линии, разница между вертикальной прямой и наклоном не очевидна. Поэтому возникает вопрос о соотношении формул и графиков как мыслительных средств, представляющих одно и то же отношение, между собой, что и приводит к понятию функции.

Отметим, что вводимое нами представление – *понятие функции есть средство построения отношения между формулой и графиком* – имеет основания и в истории математики: проблема построения такого отношения возникла в результате известного спора между Эйлером и Даламбером (что такое функция – «аналитическое выражение» [20, с. 23] или «линия, начерченная свободным движением руки» [20, с. 28]). В середине XVIII в. в этой дискуссии участвовали многие выдающиеся ученые (более подробно это описано в [20, с. 22–37]), но лишь в конце XIX в. появилось определение, опирающееся на теорию множеств и ставшее общеупотребительным (для числовых функций такое определение на полвека ранее сформулировали Н. И. Лобачевский и П. Г. Л. Дирихле).

Для лучшего раскрытия нашей позиции рассмотрим конкретные пример и предложения. Для того чтобы нам было от чего оттолкнуться, с чем сравнить, изложим кратко то, как начинается изучение функции, например, в [8]:

1) рассматриваются примеры, где в разных представлениях даны зависимости одной величины от другой (например, дан график зависимости температуры от времени [8, с. 55]);

2) вводится функция как зависимость одной переменной от другой;

3) рассматривается более подробно задание функции формулой, здесь же впервые появляются задачи, где требуется не только определить значение функции по значению аргумента, но и наоборот;

4) возвращение к графическому представлению: используется аналитическое представление и таблицы, дается определение графика функции, начинают рассматриваться задачи на нахождение значения аргумента по значению функции на ее графике. Заданий на получение формулы по графику (обратный переход) на данном этапе не обнаружено.

Далее изучаются виды функций, начиная с линейной.

Как в данном случае можно осуществить заявленное смещение акцента на овладение мыслительными средствами? Как было отмечено выше, формулы и графики в таком изложении – различные сущности, поэтому не ясно, почему сразу можно считать их разными представлениями одного и того же (функции). Поскольку наша цель сводится к тому, чтобы школьники овладели не только операциями, но и отношениями, нужно добиваться того, чтобы и формула, и график были освоены учениками как мыслительные средства, представляющие отношения.

Поэтому в отмеченном примере с графиком зависимости температуры от времени нужно также ставить вопрос о зависимости времени от температуры: можно попросить учеников нарисовать соответствующий график и обратить их внимание на то, что полученный график уже «содержался» в исходном, нужно было только правильно посмотреть (повернуть голову или чертеж на бок или по-новому взглянуть на оси). Тем самым один исходный график выражает две зависимости. При этом задачи на нахождение значения второй переменной величины по значению первой не исчезают, наоборот, возможность «переключаться» между зависимостями делает постановку соответствующего вопроса естественной.

Разнесение же таких вопросов в задачах может пойти во вред ученику, поскольку две операции начинают восприниматься отдельно друг от друга, и школьник оказывается в ситуации схожей с описанным выше примером, когда для человека таблицы сложения и вычитания существуют изолированно. Естественно, график, полученный сменой ролей первой и второй переменной, в общем случае не будет являться графиком функции, но в этот момент ни мы, ни автор учебника еще не ввели данное понятие, происходит только движение в этом направлении. А в рамках только графических представлений ограничение: каждому значению x не может соответствовать более одного y не возникает, оно является искусственным, привнесенным извне. Другое дело формула, поскольку на начальных этапах знакомства с ней естественна ее запись в виде $y = f(x)$, указанное ограничение для нее очевидно: «Как может получиться несколько y , если я подставляю в $y = f(x)$ вместо x конкретное значение?» Поэтому для введения функции как мыслительного средства, учитывающего данное ограничение и имеющего графическое и аналитическое представления, необходимо соотнесение между собой формул и графиков (данный процесс должен учитывать движения в обоих направлениях).

Итак, в предлагаемом подходе путь к освоению аналитического и графического представления функции связан с независимым освоением мыслительных средств: формулы и графика. Но в этом процессе освоения есть общее: движение от частного (конкретная формула и конкретная линия) к более общему (формула вообще и произвольная линия). И лишь тогда, когда и формула, и график осознаются как разные способы мыслить одно и то же отношение появляется необходимость выстраивания отношения между ними – появляется функция как более сложное мыслительное средство, не только служащее для выражения изначальной связи между переменными величинами, но и учитывающее то, чего не было в предыдущих двух средствах по отдельности (рис. 1).



Рис. 1. Связь функции и ее представлений как мыслительных средств

Для соотнесения между собой формулы и графика недостаточно в процессе обучения опираться лишь на освоении операций с ними, полагать это целью, определяющей соответствующее содержание. В дальнейшем мы постараемся показать, что успешный переход от одного средства к другому, от одного представления функции к другому требует не только осуществления операции, но и соотнесения нового промежуточного результата с тем, что было или должно быть: мыслительное движение, которое совершает ученик, не является разовым актом и не направлено лишь на переход от нового к старому, а связано с неоднократным возвращением к исходному представлению для проверки своих действий, — здесь возникают средства контроля.

В современной учебной литературе, на наш взгляд, этому уделяется недостаточно внимания. Это проявляется, например, в том, что в стандартном задании из [8–16], где по формуле, задающей функцию, строится таблица ее значений, затем отмечаются соответствующие точки на координатной плоскости, и в результате соединения их некоторой линией получается график функции, не происходит должным образом акцентирование внимания обучающихся на том факте, что последнее действие может быть пересмотрено. Если потребуются нарисовать график более детально, учитывая большее число точек, или при дальнейшем решении выяснится, что удобнее было соединить их не данной линией, а другой (ломаной или гладкой кривой), то придется изменять построенный график, делая его более точным для поставленной задачи. Пример другого, уже упоминавшегося выше задания: по графику нужно определить значение функции при данном значении переменной. Обычно здесь выбираются точки с очевидной (целочисленной и пр.) ординатой, поэтому из рассмотрения выпадает ситуация, когда мы сначала определяем значение приблизительно, настолько точно, насколько можем, а затем, при необходимости, возвращаемся и определяем координату более корректно при помощи вспомогательного разбиения отрезков.

С учетом сказанного выше, вернемся к публикациям, связанным с применением компьютерных технологий при изучении понятия функции. Принципиальный вклад, которые данные технологии могут оказать, — это демонстрация непрерывной зависимости одного представления функции от другого: при плавном изменении чисел в формуле сдвигается и изменяется график и наоборот. Это способствует выстраиванию отношений между разными представлениями. Отметим, что про манипуляцию графиками и анализ происходящих изменений учениками указывается в работах, например в [21], но акцент на этом в указанном понимании делается не столь явно.

Среди относительно недавних работ есть также методические подходы, которые близки к нашей тематике, но не связаны с компьютерными технологиями. Например, в работе М. Ю. Пермяковой [22] рассматриваются вербальное (связанное с передачей информацией о свойствах функции), аналитическое и графическое представление функции: проводится анализ заданий нынешних учебных пособий и разрабатываются свои с учетом того, какое представление дано в условии и какое требуется в ответе. Со своей позиции заметим, что вербальное представление выпадает из ряда мыслительных средств: когда мы видим или слышим слова, скажем,

«четная функция», мы представляем либо график с определенным свойством, либо некоторые формулы. То есть вербальный подход служит для обращения к мыслительному средству (более широко – для управления и организации средств мышления, как это фактически представлено в концепции П. Я. Гальперина), но сам по себе не позволяет мыслить отношения между величинами.

В другой статье [23] учащимся предлагается подход, опирающийся на задания по созданию некоторых графических изображений на основе простых уравнений (прямой, отрезка и пр.). Мы в свою очередь отметим, что это не только, как отмечают авторы, повышает увлеченность школьников, но и способствует тому, что формула, задающая линейную функцию, будет освоена ими как средство для разрешения конкретной проблемы (что здесь изображено?), а также связано с наличием общей картины, гештальт-структуры [24], обращение к которой может приводить к пересмотру и корректировке своих действий на построение.

Избранная нами позиция определила дальнейшее направление исследования. Поскольку функция как сложное понятие напрямую связана с соотношением формулы и графика, предполагающим переход от одного из этих средств к другому и обратно, требуется вести деятельность в двух направлениях: провести анализ действий обучающихся, связанных с переходом от аналитического представления функции к графическому (это соответствует переходу от формулы к графику) и с переходом от графического представления функции к аналитическому (переход от графика к формуле). Описание проведенных исследований, анализ их результатов и соответствующие выводы будут представлены в продолжении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богуславский М. В., Садовников Е. Ю. Динамика создания отечественных учебных пособий общего математического образования в 1970-е годы // Проблемы современного образования. 2024. № 2. С. 115–126. URL: <http://www.pmedu.ru/images/2024-2/115126.pdf> (дата обращения: 27.01.2025). DOI: <https://doi.org/10.31862/2218-8711-2024-2-115-126>.
2. Суворова С. Б. Организация материала в учебниках алгебры VI–VIII классов // Преподавание алгебры в 6–8 классах / сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. М.: Просвещение, 1980. С. 5–45.
3. Макарычев Ю. Н., Кузнецова Л. В. Функции в школьном курсе алгебры // Преподавание алгебры в 6–8 классах / сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. М.: Просвещение, 1980. С. 63–76.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох [и др.]. Сост. В. И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
5. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. М.: Дрофа, 2008. 415 с.
6. Тагаева Е. А., Капкаева Л. С., Иванова Т. А. Методические подходы к изучению базовых понятий математического анализа в школьном курсе математики // Учебный эксперимент в образовании. 2024. № 2 (110). С. 87–94.
7. Гаврилова Е. А., Перческлеева Ю. Ю. Различные подходы к определению понятия функции // Вестник научных конференций. 2024. № 3–3 (103). С. 41–43.
8. Математика. Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2023. 255 с.
9. Математика. Алгебра: 8-й класс: базовый уровень: учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2023. 319 с.
10. Математика. Алгебра: 9-й класс: базовый уровень: учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2023. 255 с.
11. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 7-й класс. Учебник для общеобразоват. организаций (углубленный уровень): в 2 ч. Ч. 1. М.: Мнемозина, 2019. 232 с.

12. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 8-й класс. Учебник для общеобразоват. организаций (углубленный уровень): в 2 ч. Ч. 1. М.: Мнемозина, 2019. 288 с.
13. Мордкович А. Г., Николаев Н. П., Семенов П. В. Алгебра. 9-й класс. Учебник для общеобразоват. организаций (углубленный уровень): в 2 ч. Ч. 1. М.: Мнемозина, 2019. 288 с.
14. Потапов М. К., Шевкин А. В. Алгебра. Методические рекомендации. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2017. 143 с.
15. Потапов М. К., Шевкин А. В. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2017. 160 с.
16. Потапов М. К., Шевкин А. В. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2019. 191 с.
17. Данилова Н. А., Хамзяева В. Х. Пути устранения затруднений учащихся, возникающих при выполнении заданий по теме «Функции и их графики» ОГЭ по математике // Актуальные проблемы современного образования. 2023. № 9 (34). С. 146–153.
18. Мишенина О. В. Теория и методика изучения функций в основной школе в контексте модульного обучения: дис. ... канд. пед. наук. Киров, 2004. 190 с.
19. Боровских А. В. О содержании школьного математического образования. От содержимого к содержанию: математика как система мыслительных средств // Вестн. Московского ун-та. Сер. 20: Педагогическое образование. 2024. Т. 22, № 2. С. 61–82.
20. Рыбников К. А. История математики. Т. 2. М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. 336 с.
21. Эверстова В. Н., Сивцева А. П. Применение графического онлайн-калькулятора Desmos в обучении алгебре (на примере изучения темы «Линейная функция и ее график» в 7 классе) // Современные проблемы науки и образования. 2021. № 6. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=31268> (дата обращения: 27.01.2025). DOI: <https://doi.org/10.17513/spno.31268>.
22. Пермякова М. Ю. Рабочая тетрадь по математике как средство развития функционально-графической грамотности учащихся основной школы // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. Т. 8, № 6. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/30PDMN620.pdf> (дата обращения: 27.01.2025).
23. Коберник Ю. В., Скубко В. В. Возможные пути преодоления трудностей учащихся в изучении графиков функций и уравнений // Инновационные научные исследования. 2020. № 12–3 (2). С. 98–108.
24. Вертгеймер М. Продуктивное мышление: пер. с англ. / общ. ред. С. Ф. Горбова и В. П. Зинченко; вступ. ст. В. П. Зинченко. М.: Прогресс, 1987. 336 с.

REFERENCES

1. Boguslavskiy M. V., Sadovnikov E. Yu. Dinamika sozdaniya otechestvennykh uchebnykh posobiyy obshchego matematicheskogo obrazovaniya v 1970-e gody. *Problemy sovremennogo obrazovaniya*. 2024, No. 2, pp. 115–126. Available at: <http://www.pmedu.ru/images/2024-2/115126.pdf> (accessed: 27.01.2025). DOI: <https://doi.org/10.31862/2218-8711-2024-2-115-126>.
2. Suvorova S. B. Organizatsiya materiala v uchebnikakh algebry VI–VIII klassov. In: *Prepodavaniye algebry v 6–8 klassakh*. Ed. by Yu. N. Makarychev, N. G. Mindyuk. Moscow: Prosveshchenie, 1980. Pp. 5–45.
3. Makarychev Yu. N., Kuznetsova L. V. Funktsii v shkolnom kurse algebry. In: *Prepodavaniye algebry v 6–8 klassakh*. Ed. by Yu. N. Makarychev, N. G. Mindyuk. Moscow: Prosveshchenie, 1980. Pp. 63–76.
4. Blokh A. Ya. et al. *Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole: Chastnaya metodika: Ucheb. posobie dlya studentov ped. in-tov po fiz.-mat. spets.* Ed. by V. I. Mishin. Moscow: Prosveshchenie, 1987. 416 p.
5. *Metodika i tekhnologiya obucheniya matematike. Kurs lektsiy: posobie dlya vuzov*. Ed. by N. L. Stefanova, N. S. Podkhodova. Moscow: Drofa, 2008. 415 p.
6. Tagaeva E. A., Kapkaeva L. S., Ivanova T. A. Metodicheskie podkhody k izucheniyu bazovykh ponyatiy matematicheskogo analiza v shkolnom kurse matematiki. *Uchebnyy eksperiment v obrazovanii*. 2024, No. 2 (110), pp. 87–94.
7. Gavrilova E. A., Percheskleeva Yu. Yu. Razlichnye podkhody k opredeleniyu ponyatiya funktsii. *Vestnik nauchnykh konferentsiy*. 2024, No. 3–3 (103), pp. 41–43.

8. Makarychev Yu. N. et al. *Matematika. Algebra: 7-y klass: bazovyy uroven: uchebnik*. Ed. by S. A. Telyakovskiy. Moscow: Prosveshchenie, 2023. 255 p.
9. Makarychev Yu. N. et al. *Matematika. Algebra: 8-y klass: bazovyy uroven: textbook*. Ed. by S. A. Telyakovskiy. Moscow: Prosveshchenie, 2023. 319 p.
10. Makarychev Yu. N. et al. *Matematika. Algebra: 9-y klass: bazovyy uroven: textbook*. Ed. by S. A. Telyakovskiy. Moscow: Prosveshchenie, 2023. 255 p.
11. Mordkovich A. G., Nikolaev N. P. *Algebra. 7-y klass. Uchebnik dlya obshcheobrazovatelnykh organizatsiy (uglublennyy uroven)*. In 2 parts. Part 1. Moscow: Mnemozina, 2019. 232 p.
12. Mordkovich A. G., Nikolaev N. P. *Algebra. 8-y klass. Uchebnik dlya obshcheobrazovatelnykh organizatsiy (uglublennyy uroven)*. In 2 parts. Part 1. Moscow: Mnemozina, 2019. 288 p.
13. Mordkovich A. G., Nikolaev N. P., Semenov P. V. *Algebra. 9-y klass. Uchebnik dlya obshcheobrazovatelnykh organizatsiy (uglublennyy uroven)*. In 2 parts. Part 1. Moscow: Mnemozina, 2019. 288 p.
14. Potapov M. K., Shevkin A. V. *Algebra. Metodicheskie rekomendatsii. 7 klass: ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizatsiy*. Moscow: Prosveshchenie, 2017. 143 p.
15. Potapov M. K., Shevkin A. V. *Algebra. Metodicheskie rekomendatsii. 8 klass: ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizatsiy*. Moscow: Prosveshchenie, 2017. 160 p.
16. Potapov M. K., Shevkin A. V. *Algebra. Metodicheskie rekomendatsii. 9 klass: ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizatsiy*. Moscow: Prosveshchenie, 2019. 191 p.
17. Danilova N. A., Khamzyaeva V. Kh. Puti ustraneniya zatrudneniy uchashchikhsya, vznikayushchikh pri vypolnenii zadaniy po teme "Funktsii i ikh grafiki" OGE po matematike. *Aktualnye problemy sovremennogo obrazovaniya*. 2023, No. 9 (34), pp. 146–153.
18. Mishenina O. V. *Teoriya i metodika izucheniya funktsiy v osnovnoy shkole v kontekste modulnogo obucheniya. PhD dissertation (Education)*. Kirov, 2004. 190 p.
19. Borovskikh A. V. O soderzhanii shkolnogo matematicheskogo obrazovaniya. Ot soderzhimogo k soderzhaniyu: matematika kak sistema myslitelnykh sredstv. *Vestn. Moskovskogo un-ta. Ser. 20: Pedagogicheskoe obrazovanie*. 2024, Vol. 22, No. 2, pp. 61–82.
20. Rybnikov K. A. *Istoriya matematiki. Vol 2*. Moscow: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1963. 336 p.
21. Everstova V. N., Sivtseva A. P. Primenenie graficheskogo onlayn-kalkulyatora Desmos v obuchenii algebre (na primere izucheniya temy "Lineynaya funktsiya i ee grafik" v 7 klasse). *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*. 2021, No. 6. Available at: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=31268> (accessed: 27.01.2025). DOI: <https://doi.org/10.17513/spno.31268>.
22. Permyakova M. Yu. Rabochaya tetrad po matematike kak sredstvo razvitiya funktsionalno-graficheskoy gramotnosti uchashchikhsya osnovnoy shkoly. *Mir nauki. Pedagogika i psikhologiya*. 2020, Vol. 8, No. 6. Available at: <https://mir-nauki.com/PDF/30PDMN620.pdf> (accessed: 27.01.2025).
23. Kobemik Yu. V., Skubko V. V. Vozmozhnye puti preodoleniya trudnostey uchashchikhsya v izuchenii grafikov funktsiy i uravneniy. *Innovatsionnye nauchnye issledovaniya*. 2020, No. 12–3 (2), pp. 98–108.
24. Wertheimer M. *Produktivnoe myshlenie*. Transl. from English. Ed. by S. F. Gorbov, V. P. Zinchenko. Moscow: Progress, 1987. 336 p.

Лисицын Михаил Денисович, ассистент кафедры математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; аспирант Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: lismihail40rus@gmail.com

Lisitsyn Mikhail D., Assistant, Calculus Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; PhD post-graduate student, Lomonosov Moscow State University
e-mail: lismihail40rus@gmail.com

Статья поступила в редакцию 27.01.2025
The article was received on 27.01.2025