

Научная статья

<https://doi.org/10.31862/1819-463X-2026-4-194-206>

УДК 373.5+378.1

5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания

АЛГОРИТМЫ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Е. И. Де́за

Московский педагогический государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы использования алгоритмов как средства реализации интегративного (энциклопедического) подхода при обучении математике школьников и студентов педагогических вузов – будущих учителей математики и информатики. Раскрыта суть интегративного подхода к формированию содержания современного отечественного математического образования. Рассмотрена история развития понятия алгоритма. Проведен анализ структуры указанного понятия. Выявлены особенности классических и современных алгоритмов, обеспечивающие эффективность их использования при реализации интегративного подхода в обучении математике. Приведены примеры работы алгоритмов в фундаментальной и прикладной математической науке, в информатике и программировании, в других областях знания, в школьном курсе математики и информатики. Предложена методика использования алгоритмов как интегративной составляющей знаниевого остова школьников и студентов, формируемого при обучении математике.

Ключевые слова: содержание математического образования, интегративный подход, фундаментальность, прикладная направленность, междисциплинарность, алгоритмы, алгоритм Евклида, теория алгоритмов, программирование

Для цитирования: Де́за Е. И. Алгоритмы как средство реализации интегративного подхода при обучении математике // Наука и школа. 2026. № 4. С. 194–206. <https://doi.org/10.31862/1819-463X-2026-4-194-206>.

© Де́за Е. И., 2026



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ALGORITHMS AS A MEANS OF IMPLEMENTING AN INTEGRATIVE APPROACH IN TEACHING MATHEMATICS

E. I. Deza

Moscow Pedagogical State University

Abstract. *The article discusses the use of algorithms as a means of implementing an integrative (encyclopedic) approach to teaching mathematics to schoolchildren and students of pedagogical universities – future teachers of mathematics and computer science. The essence of the integrative approach to the formation of the content of modern Russian mathematical education is disclosed. The history of algorithm concept's development is considered, and an analysis of the structure of this concept carried out. Features of classic and modern algorithms have been identified that ensure their effectiveness in implementing an integrative approach to mathematical education. Examples of the work of algorithms in fundamental and applied mathematical science, in computer science and programming, in other areas of knowledge, in the school course of mathematics and computer science are given. A methodology for using algorithms as an integrative component of the knowledge core of schoolchildren and students formed when teaching mathematics is proposed.*

Keywords: *content of mathematical education, integrative approach, fundamentality, applied orientation, interdisciplinarity, algorithms, Euclid's algorithm, algorithm theory, programming*

Cite as: Deza E. I. Algorithms as a Means of Implementing an Integrative Approach in Teaching Mathematics. *Nauka i shkola*. 2026, No. 4, pp. 194–206. <https://doi.org/10.31862/1819-463X-2026-4-194-206>.

Постановка проблемы

Современные тенденции развития и модернизации отечественного математического образования направлены на формирование человека нового цифрового общества, мобильного, творческого, способного обновлять, расширять и эффективно использовать имеющийся багаж фундаментальных и прикладных знаний на протяжении всей жизни [1]. Важное место в реализации указанных целей занимает формирование *функциональной математической грамотности обучающихся*, то есть готовности и способности использовать знания, умения и навыки в области математики для анализа и решения жизненных задач различной направленности и уровня сложности. При этом не теряют актуальности, а лишь усиливают свой потенциал принципы *фундаментальности, прикладной направленности, интегративности и межпредметности*, вопросы *развития общей и математической культуры каждого индивида* и многие другие важные аспекты проблематики [1; 2].

Одной из характеристик современного цифрового общества является стремительно растущий объем информации, которую нужно переработать, систематизировать и усвоить, встроив в уже имеющуюся у каждого человека систему знаний и методов познавательной деятельности. Вопросы обновления содержания образования, поиска и использования в образовательном процессе *важнейших объектов, фактов, утверждений, формирующих ядро знаний*, уже не первое десятилетие стоят на повестке дня.

Частичное решение этой глобальной методической проблемы возможно в уже сложившихся образовательных условиях на основе *интегративного (энциклопедического) подхода*. На наш взгляд, обучение студентов и школьников традиционным разделам математической науки не только можно, но и нужно, методически целесообразно осуществлять, *формируя и систематически используя фундаментальный знаниевый остов* каждого индивида. Другими словами, выделяя при обучении относительно небольшой набор математических объектов, фактов, утверждений, методов, играющих интегративную роль в построении широкого спектра математических моделей. Делая акцент на общих свойствах данных объектов. Систематически рассматривая те или иные примеры появления и использования выделенных объектов в различных разделах прикладной и фундаментальной математической науки при решении практико-ориентированных задач. Важнейшими примерами объектов такого рода являются понятие *числа, фигуры, расстояния* [1; 2]. Одним из эффективных инструментов решения поставленных в области современного математического образования задач может служить и изучение *алгоритмов* [3].

Немного истории

Понятие алгоритма относится к первоначальным, базовым, неопределяемым понятиям математики [4; 5]. *Алгоритмы* (лат. *algorithmi*), понимаемые как конечная совокупность точно заданных правил решения некоторого класса задач, набор инструкций, выполнение которых приводит при заданных начальных данных к четко определенному результату, известны человечеству с глубокой древности (арифметические действия над натуральными числами, нахождение наибольшего общего делителя двух чисел и т. д.).

Папирус Райнда (найден и расшифрован в XIX в.) – документальное подтверждение существования алгоритмов еще в Древнем Египте. В папирусе содержатся, в том числе, инструкции по проведению конкретных подсчетов, отражающие основные алгоритмические принципы: последовательное оперирование конечными объектами с целью получения результата – еще одного конечного объекта.

О математике древнего Вавилона мы знаем из клинописных глиняных табличек. В этот период появляются задачи, не имеющие отношения к практической деятельности (в том числе связанные с решением линейных и квадратных уравнений и их систем), хотя формулировки все еще носят конкретный характер. Предлагаемые для решения представленных задач вычисления являются, по сути, описанием действий вычислителя, то есть конкретными инструкциями-алгоритмами.

В Древней Греции математика приобретает самостоятельную ценность. Пифагор и его ученики доказывают различные математические факты лишь на основании логических рассуждений. Они впервые в истории оставляют практические потребности за рамками своих теоретических построений. Появляется фундаментальный труд Евклида, содержащий хорошо известный сегодня не только в математике, но и за ее пределами метод нахождения наибольшего общего делителя. При этом схема алгоритма впервые дана для произвольных чисел, а не для конкретных, как в Вавилоне и Египте.

Впрочем, собственно термин «алгоритм» появился значительно позже. Современная математическая наука связывает его происхождение с именем аль-Хорезми, арабского ученого, познакомившего Запад с индийской позиционной

арифметикой. Около 825 г. аль-Хорезми написал сочинение «*Китаб аль-джебр валь-мукабала*» («Книга о сложении и вычитании»), в котором было представлено описание разработанной в Индии позиционной десятичной системы счисления и алгоритмов действий над числами, записанными в данной системе. В первой половине XII в. книга аль-Хорезми в латинском переводе проникла в Европу. При этом имя автора было вынесено в заглавие книги: «*Algoritmi de numero Indorum*» («Алгоритмы о счете индийском»). Множество позднейших трудов, посвященных искусству счета в позиционной системе счисления, также имели в названии слово «*algoritmi*» (или «*algorismi*»). Это привело к тому, что с течением времени термин «*algorism*» («*algorismus*») стал означать способ выполнения арифметических действий посредством арабских цифр, без использования абакса. Именно в таком значении – алгоритм как искусство счета – термин вошел в европейские языки. Постепенно значение слова расширялось. Ученые начинали применять его не только к сугубо вычислительным, но и к другим математическим процедурам («*algorismus proportionum*» – вычисление пропорций, «*algorithmus linealis*» – счет на линиях и др.). В 1684 г. Готфрид Лейбниц впервые использовал термин «*algorithmus*» для описания методов решения проблем дифференциального исчисления. Пользовался словом «алгоритм» и Леонард Эйлер – так, одна из его работ носит название «*De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*» («Использование нового алгоритма для решения проблемы Пелля»). Понимание Л. Эйлером термина «алгоритм» как синонима общего термина «способ решения задачи» очень близко современному [4; 5].

К началу XX в. слово «алгоритм» означало любой арифметический или алгебраический процесс, выполняемый по строго определенным правилам. В этот период теоретические проблемы математики, ускорение развития физики и техники поставили на повестку дня точное определение понятия алгоритма. Множество попыток такого рода было сделано в первой половине XX в. (Эмиль Борель, Алан Тьюринг, Эмиль Пост, Жак Эрбран, Курт Гедель, А. А. Марков, Алонзо Черч и др.). Возникла отдельная область математики, целиком посвященная данной тематике – теория алгоритмов. Алгоритмы стали предметом все более пристального внимания ученых, постепенно заняв одно из центральных мест в современной математике. Несмотря на это, широкой аудиторией алгоритм все еще воспринимался как термин сугубо специальный [5].

Ситуация принципиально изменилась в середине XX в. Слово «алгоритм» обрело новую жизнь благодаря появлению и повсеместному распространению компьютеров [6; 7]. Развитие ЭВМ привело не только к дальнейшему уточнению понятия алгоритма, углублению соответствующей математической теории, появлению множества новых прикладных и теоретических аспектов проблематики, но и к стремительному проникновению термина из чистой математики в другие сферы науки, техники, в повседневный обиход. (Так, с 1985 г. слово «алгоритм» входит во все школьные учебники информатики.)

Сегодня, в эпоху цифрового общества, слово «алгоритм» известно, вероятно, каждому. Оно уверенно шагнуло и в повседневную жизнь: мы постоянно встречаем словосочетания «алгоритм поведения», «алгоритм успеха», «алгоритм предательства» и др. Можно утверждать, что в наше время «...понятие алгоритма является не только центральным понятием теории алгоритмов, не только одним из главных понятий математики вообще, но одним из главных понятий современной науки. Более того, сегодня, с наступлением эры информатики, алгоритмы становятся одним из важнейших факторов цивилизации...» [8].

Что же такое алгоритм?

Современная наука считает, что «понятие алгоритма, подобно понятиям множества и натурального числа, принадлежит к числу понятий столь фундаментальных, что оно не может быть выражено через другие (в частности, теоретико-множественные), а должно рассматриваться как неопределяемое» [8]. Конечно, существует множество формулировок, раскрывающих суть термина. Одна из них принадлежит А. А. Маркову [9]:

- *«...алгоритм – это точное предписание, которое задает вычислительный процесс, начинающийся с произвольного (но выбранного из фиксированной для данного алгоритма совокупности) исходного данного и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата...».*

Более конкретная формулировка предложена А. Н. Колмогоровым [10]. Она опирается на две существенные идеи: итеративность процесса и локальность каждого шага. В целом различные подходы к пояснению сути алгоритма в явной или неявной форме содержат ряд общих свойств. В их числе [8]:

- *дискретность* – алгоритм есть упорядоченный набор простых шагов, выполнение каждого из которых происходит в конечное время;
- *детерминированность (определенность)* – каждый следующий шаг алгоритма однозначно определяется текущим состоянием системы; мы имеем один и тот же результат для одних и тех же исходных данных;
- *понятность и формальность* – алгоритм использует лишь доступные исполнителю команды; как правило, команды записаны специальным формальным языком;
- *завершаемость (конечность) и результативность* – при легитимных начальных данных алгоритм выдает результат (завершает работу), за конечное число шагов;
- *массовость (универсальность)* – алгоритм применим к множеству (как правило, широкому) наборов начальных данных, к классу объектов.

Конечно, данный список далеко не полон. Более того, каждое положение списка нуждается в пояснениях, уточнениях, комментариях, связанных с возможными вариациями, исключениями и т. д. Наконец, обычно каждый конкретный алгоритм задается в некоторой вычислительной модели: машина Тьюринга, машина Поста, нормальные алгорифмы Маркова и др. В формальное обсуждение всех возникающих при этом аспектов мы углубляться не будем. Дело в том, что для понимания сути алгоритма широкой аудиторией вполне достаточно обсуждения общих формулировок и основных свойств. **«Огромное число теорем, предполагающих построение тех или иных алгоритмов и встречающихся в различных областях математики, не требует для своего понимания общего понятия алгоритма»** [8].

С точки зрения рассматриваемой в статье научно-методической проблемы, наша задача такова. Сформировать у обучающихся первичное понятие алгоритма. Познакомить их с классическими примерами алгоритмов. Вооружить их инструментами построения и реализации простейших алгоритмов, в том числе при решении множества конкретных задач учебной и профессиональной деятельности и повседневной жизни. В идеале – обеспечить осознание универсальности алгоритмического метода как интегративной составляющей науки и общечеловеческой практики. В этой связи среди трех основных составляющих современной алгоритмической проблематики – «общее понятие алгоритма» – «теория алгоритмов как раздел математической

науки» – «алгоритмы и компьютер», – нас интересует первая. Конечно, при этом как средство для решения поставленных перед нами задач и теория алгоритмов, и алгоритмы в программировании (и многие другие аспекты) нужны и важны. Мы обсудим эти вопросы ниже.

Классические теоретико-числовые алгоритмы

Еще раз вспомним об *алгоритме Евклида* – одном из самых старых и, возможно, самом известном человечеству алгоритме, который активно используется и сегодня [11–13]. Знакомый уже древнегреческим и древнекитайским математикам алгоритм «взаимного вычитания» получил имя Евклида, поскольку впервые был описан в его «Началах» (III в. до н. э.). Данный алгоритм предназначен для поиска *наибольшего общего делителя* двух натуральных чисел a и b . Он заключается в последовательном построении пар, состоящих из меньшего числа и разницы между большим и меньшим числом до тех пор, пока числа не станут равными. Так, пара (96, 40) приведет к построению пар (56, 40), (40, 16), (24, 16), (16, 8), (8, 8), что позволит утверждать, что $\text{НОД}(96, 40) = 8$. В современных версиях мы говорим об алгоритме Евклида, если делим целое число a на натуральное число b , не делящее a , с остатком, и повторяем деление с остатком делителя предыдущего шага на остаток предыдущего шага до получения нулевого остатка. В этом случае наибольший общий делитель $\text{НОД}(a, b)$ равен последнему ненулевому остатку алгоритма. Нетрудно убедиться в том, что алгоритм Евклида удовлетворяет всем перечисленным выше существенным алгоритмическим свойствам. Он применим к любым натуральным числам a, b (если b делит a , то $\text{НОД}(a, b) = b$), выполняется за конечное число шагов (конечность алгоритма обеспечивается построением убывающей последовательности натуральных чисел – остатков), при этом каждый следующий шаг однозначно определяется шагом предыдущим. Алгоритм Евклида является базой для серьезных фундаментальных математических построений. Он имеет многочисленные применения в теории чисел (диофантовы уравнения, цепные дроби и др.), алгебре (теория евклидовых колец), геометрии (нахождение общей меры двух отрезков), то есть служит основой для построения целого семейства других, родственных, но более сложных алгоритмов. Он используется и при решении множества прикладных задач (теория сложности, криптография и др.), естественно связан с теорией специальных чисел (числа Фибоначчи). Поскольку алгоритм Евклида является составной частью школьной и вузовской математической подготовки, то при знакомстве с ним обучающиеся получают возможность рассмотреть целый спектр интересных и полезных исторических, математических, практико-ориентированных фактов и утверждений [9–11]. Добавим, что именно при описании метода Евклидом инструкции впервые в истории были применены не к конкретным, а к любым натуральным числам, то есть впервые был явно указан класс объектов, с которыми метод может иметь дело. Кроме того, в XVIII–XIX вв. при изучении числовых колец, отличных от кольца целых рациональных чисел, было обнаружено, что в ряде случаев алгоритм Евклида не дает сходимости [4]. Это послужило толчком к дополнительным теоретическим исследованиям.

Алгоритмы арифметических действий (сложения, умножения, вычитания и деления натуральных чисел) не так знамениты, как алгоритм Евклида. Возможно, потому, что их использование стало повседневной реальностью каждого человека, они прочно вошли в нашу повседневную жизнь [12; 13]. Тем не менее они остаются базовыми арифметическими алгоритмами и являются примером конструкций,

освоение которых абсолютно необходимо для формирования функциональной математической грамотности. При этом речь не идет об их «практико-направленном использовании», в этом нет нужды. Они просто есть, и оперировать ими умеет (должен уметь) каждый. Хочется добавить, что очень высок обучающий потенциал задачи о приближенном извлечении квадратного корня – еще одной арифметической операции, для реализации которой существует множество алгоритмов, в том числе вычислительных. Мы поговорим об этом в отдельной статье.

Алгоритмы перевода числа из одной системы счисления в другую позволяют развить навыки вычислительных и логических алгоритмических действий, имеют тесные связи с информатикой. Их изучение обеспечивает фундаментальность математической подготовки, развитие общей и математической культуры обучающихся [12]. Заметим, что при обсуждении алгоритмов такого рода мы встречаемся с бесконечными процедурами, которые, тем не менее, дают вполне определенный четко описываемый результат.

Простейшие алгоритмы проверки натурального числа на простоту и факторизации натуральных чисел, с точки зрения математического образования, представляют собой два тесно связанных между собой объекта. Однако в современных приложениях им отводится разное место: проблема факторизации произвольного большого числа значительно сложнее тестирования данного числа на простоту. На наш взгляд, оба алгоритма должны входить в «перечень» математических конструкций, освоение которых необходимо для формирования функциональной математической грамотности. С другой стороны, эти вопросы выводят нас на передовые рубежи прикладных (вычислительных, криптографических и др.) и методологических (теория сложности вычислений) проблем. Тесты простоты (Ферма, Миллера – Рабина, Соловея – Штрассена, Люка и многие другие) – фундаментальные математические алгоритмы, направленные на службу практическим потребностям теории защиты информации, в то время как различные способы факторизации – большой теоретический раздел классической теории чисел [12; 13]. Соответствующие алгоритмы (арифметические действия по заданному модулю, возведение в степень в модулярной арифметике, вычисления символов Лежандра и Якоби и др.), как классические, так и современные, полезно активно использовать при обучении программированию.

С указанной тематикой тесно связаны и *методы решета* – серьезнейший фундаментальный теоретико-числовой аппарат, берущий свое начало с *решета Эратосфена*, старейшего метода поиска всех простых чисел на заданном интервале. Сегодня решето Эратосфена – алгоритм, имеющий лишь историческое значение, но, безусловно, положительно влияющий на формирование общей и математической культуры обучающихся [11; 12].

Скажем несколько слов и о *треугольнике Паскаля* – арифметическом треугольнике, построенном на основе простейшего числового алгоритма, опирающегося лишь на сложение натуральных чисел [14]. В вершине и на боковых сторонах треугольника расположены единицы, в то время как каждый внутренний элемент равен сумме двух чисел, расположенных непосредственно над ним. Полученная без обращения к другим разделам математики арифметическая конструкция «вдруг» оказывается очень многогранной. Треугольник служит аддитивным инструментом получения коэффициентов разложения бинома Ньютона (алгебра), и состоит из чисел сочетаний (комбинаторика). Его элементами являются треугольные (вторая диагональ) и тетраэдральные (третья диагональ) числа, равно как их нульмерные, одномерные и многомерные аналоги; по этой причине треугольник Паскаля часто называют треугольником фигурных чисел. В нем нетрудно найти числа Фибоначчи (суммы элементов каждой из нисходящих

диагоналей), числа Мерсенна и совершенные числа (рассмотрим конструкции, возникающие при исследовании элементов треугольника по модулю два) и др. (теория специальных чисел). При большом масштабе треугольник Паскаля, рассматриваемый по модулю два, переходит в треугольник Серпинского (теория фракталов). Богатейшая история, разнообразие связи с различными разделами математики, широкие возможности обобщений (обобщенные треугольники Паскаля, пирамида Паскаля, треугольники Стирлинга, Эйлера, Каталана и др.) позволяют с успехом использовать его для формирования фундаментальной математической базы обучающихся, повышения их интереса к предмету [14]. В свете реалий сегодняшнего дня эти аспекты крайне важны, прежде всего – для школьного математического образования.

Алгоритмы и специальные числа

В связи с рекуррентным построением треугольника Паскаля хочется подчеркнуть, что пока совсем недостаточно используются в математическом образовании обучающие возможности *рекуррентных соотношений*. Достаточно напомнить, что почти все классы *специальных чисел* (числа Фибоначчи, многоугольные числа, числа Мерсенна, числа Ферма, числа Стирлинга, числа Эйлера, числа Каталана и др.) допускают рекуррентный поход к их построению, а естественные связи с арифметическими прогрессиями позволяют успешно рассматривать эти вопросы в рамках школьной математики [15; 16]. Впрочем, специальные числа порождают целый спектр разноплановых алгоритмов, в их числе – методы вычисления пифагоровых троек (формулы Платона, формулы Евклида, метод Фибоначчи и др.), правила построения совершенных (теорема Евклида-Эйлера) и дружественных (правило Сабита, правило Эйлера, правило Боро) чисел и многие другие. Знакомство с ними, конечно, необязательно, но полезно и может быть использовано для решения многих задач современной теории и методики обучения математике [1; 2; 16].

Рассмотрим, например, *вопросы поиска новых совершенных и дружественных чисел* [16]. *Теорема Евклида – Эйлера утверждает, что четное натуральное число является совершенным тогда и только тогда, когда имеет вид $2^{k-1}(2^k - 1)$, где $2^k - 1$ – простое число.*

Это сводит поиск четных совершенных чисел к поиску новых *простых чисел Мерсенна* $M_p = 2^p - 1$, $p \in P$. Сегодня известно 51 простое число Мерсенна, наибольшее из которых имеет более 24 млн десятичных знаков. Что касается нечетных совершенных чисел, пока не найдено ни одного, хотя и не доказано, что их не существует. Указанная тематика, арифметическая по своей природе, дает широкий простор для постановки и решения различных вычислительных задач, от простейших учебных до исследовательских [16].

Еще один аспект. Теория специальных чисел связана со многими важными вопросами арифметики, имеющими долгую и богатую историю, не только математическое, но и историческое, общекультурное, патриотическое значение.

Возможности алгоритмов при реализации интегративного подхода при обучении математике

В свете проведенного анализа истории вопроса, сути понятия алгоритма и классических теоретико-числовых алгоритмов становится очевидным, что алгоритмы могут быть с успехом использованы как одна из интегративных составляющих знаниевого остова обучающихся. В этой связи речь идет, прежде всего, о формировании

у школьников и студентов общей алгоритмической культуры, понимания универсальности алгоритмического подхода, представления о работе базовых алгоритмов, умения использовать простейшие алгоритмы в учебной и профессиональной деятельности, в повседневной жизни. Другими словами, об «общем» и практико-ориентированном понятии алгоритма. Однако в современных условиях глобального перехода к цифровому обществу важно сформировать у молодежи понимание сути используемых цифровых структур, представление о математических моделях, лежащих в основе современных информационных технологий, что требует учета «компьютерной» составляющей проблематики. Для учителя математики эти вопросы особенно актуальны: он должен не только сам иметь необходимую теоретическую и практическую базу, но и уметь передать необходимый багаж знаний и умений своим ученикам. Кроме того, для учителя как профессионала важна и третья, «теоретическая» составляющая: он должен быть хорошо знаком с основными фактами теории алгоритмов, одного из разделов фундаментальной математической науки.

Практические пути реализации поставленных задач существенно опираются на дидактические принципы *фундаментальности, прикладной направленности, интегративности и межпредметности* [1; 2].

Феномен *фундаментализации* основан на идее единства мира, выражающей-ся в наличии базовых, основополагающих явлений, фактов и закономерностей, пронизывающих как научную, так и практическую составляющие человеческой цивилизации [2]. Теоретические основы предлагаемой нами концепции создания знаниевого остова опираются именно на эти идеи. В этом контексте термины «фундаментализация», «интегративный подход» и «энциклопедизм» частично совпадают. Однако не следует забывать, что получаемое таким образом «образование вширь» должно быть дополнено, если оно претендует на фундаментальность, «образованием вглубь». Именно, фундаментальное математическое образование любого уровня подразумевает серьезное отношение к изучаемым объектам, фактам, утверждениям, методам, сохранение научного подхода к построению содержания обучения, предупреждения его выхолащивания, замещения математических рассуждений «практико-ориентированными» иллюстрациями. Это в полной мере относится к внедрению алгоритмов в знаниевый остов обучающихся любого образовательного уровня. Кроме того, если речь идет об углубленной, профильной или профессиональной математической подготовке, нам не обойтись без серьезных теоретических математических построений. Мы уже говорили о теории алгоритмов как существенной составляющей предметной подготовки будущего учителя [6]. Без этого использование алгоритмов как интегративной части остова профессиональных знаний специалиста, педагога-математика, будет неэффективным.

Добавим, что большинство алгоритмов, значимых для математического образования, имеют глубочайшие исторические корни, связаны с именами многих известных ученых, с важными вехами развития науки. Знакомство обучающихся с указанной информацией не только укрепляет фундаментальный базис их математических знаний, но и способствует формированию общей культуры, интереса к истории цивилизации, энциклопедического взгляда на общечеловеческие ценности.

Говоря о *прикладной направленности*, еще раз хочется подчеркнуть, что, на наш взгляд, алгоритмические задачи такого плана нужны и важны, но было бы неразумно переходить преимущественно на них, жертвуя при этом фундаментальной составляющей. Нельзя ограничиваться лишь умением решать простейшие практико-ориентированные задачи алгоритмического характера и понятие функциональной математи-

ческой грамотности. Мы уж приводили примеры такого рода, говоря об алгоритмах арифметических действий. С другой стороны, грамотно выбранная и вовремя предложенная задача с практическим содержанием может существенно повысить эффективность обучения. Так, алгоритм Гаусса *вычисления даты Пасхи* текущего (или любого другого) года состоит в следующем. Фиксируем номер N года. Делим N на 19 с остатком, запоминаем остаток x . Делим N на 4 с остатком, запоминаем остаток y . Делим N на 7 с остатком, запоминаем остаток z . Делим $19x + 15$ на 30 с остатком, запоминаем остаток u . Делим $2y + 4z + 6u + 6$ на 7 с остатком, запоминаем остаток e . Вычисляем $f = u + e$; если $f \leq 26$, то пасха приходится на $4 + f$ апреля; если $f > 26$, то пасха приходится на $f - 26$ мая. Безусловно, задача имеет прикладную направленность. Алгоритм может быть использован в учебном процессе, позволяя повысить интерес обучающихся к рассматриваемому материалу, продемонстрировать, как математика и информатика «работают» в повседневной жизни. Об алгоритмах приближенного вычисления квадратного корня мы уже упоминали. Классическая прикладная проблема. Но сколько предоставляет возможностей для обсуждения теоретических (цепные дроби, численное решение уравнений и др.) конструкций!

Переходя к вопросам *интегративности и междисциплинарности*, следует отметить, что алгоритмы имеют множество приложений в различных, зачастую крайне далеких друг от друга областях знания: физике, химии, биологии, психологии, теории управления, языковедении и др. Исследование соответствующей проблематики – тема почти бесконечная. Мы хотели бы остановиться подробно лишь на одном аспекте, связанном с «компьютерной» составляющей алгоритмической проблематики. В реалиях сегодняшнего дня, характеризующегося внедрением цифровых технологий во все сферы жизни современного общества, компьютерные программы и связанные с ними алгоритмические структуры приобретают фундаментальное значение, сравнимое лишь с ролью письменности. В этой связи программирование, рассматриваемое как способность выразить любой «правильный» процесс средствами, доступными для передачи машине [17], то есть прежде всего алгоритмическими средствами, называют сегодня *второй грамотностью* [17].

Поэтому за рамками обсуждения нельзя оставить возможности использования программных средств в изучении специальных дисциплин и, наоборот, потенциала задач той или иной предметной области при обучении программированию. Рассмотрим конкретные примеры.

Фундаментальная дисциплина «Численные методы» существенно использует ряд классических практико-ориентированных алгоритмов. Задачи, решаемые в рамках курса, это задачи на построение тех или иных алгоритмов, направленных на получение числового результата [16]. Среди них: численное решение алгебраического уравнения; численное решение системы линейных и нелинейных уравнений; нахождение элемента наилучшего приближения методом наименьших квадратов; построение интерполяционного многочлена; численное интегрирование и др.

При решении задач обучающиеся используют уже имеющиеся у них навыки программирования. Иначе получение результата, удовлетворяющего заранее заданной, достаточно высокой, точности, становится проблематичным. С другой стороны, задачи на нахождение числового значения какого-либо выражения с заданной точностью являются стандартными в теме «Циклы» и «Рекурсивные функции» дисциплины «Программирование». При изучении указанных тем естественно рассмотреть упражнения, приводящие к решению той или иной задачи численного анализа.

Пронизан алгоритмическим подходом и относительно новый для математического образования курс дискретной математики [14]. Помимо рекуррентных соотношений, которые появляются при изучении треугольника Паскаля и чисел Фибоначчи, полностью алгоритмизируемы и многие задачи теории графов. Более того, обход графа, поиск его радиуса и диаметра, нахождение расстояний между вершинами – классические компьютерные алгоритмы [16], без программной поддержки здесь не обойтись. В этом случае нужно не просто показать обучающимся, как применять программные средства для решения той или иной задачи, но и подчеркнуть, что в практико-ориентированных моделях использование вычислительных средств является существенной частью как постановки, так и решения задачи.

Очень близок к этому аспекту и классический пример из современной *криптографии* [13]. Надежность системы RSA опирается на вычислительную сложность факторизации больших натуральных чисел. Для неподготовленного слушателя данный вопрос совсем непросто. Алгоритм разложения на простые множители натурального числа n путем пробного деления на простые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$, хорошо знаком каждому (вспомним о функциональной математической грамотности!). Совершенно неясно, в чем может состоять сложность его практического использования. Суть проблемы – в размере исследуемого натурального числа n . Переход от, например, 4-значных чисел к 100-значным имеет значение, и, чтобы осознать проблему, нужно попробовать поработать с числами большими. В данном случае использование программных средств необходимо и является основным условием корректного использования алгоритма [13].

Впрочем, для демонстрации эффективности использования программирования при решении теоретико-числовых задач совсем не обязательно обращаться к таким серьезным приложениям, как основы защиты информации. Можно использовать любые задачи на нахождение нужных числовых величин в заданном интервале. Для теории чисел это, например, вычисление значений функции Эйлера, функции делителей, функции Мебиуса; подсчет числа простых или бесквадратных чисел на заданном промежутке. Нетрудно реализовать программными средствами алгоритмы разложения числа в цепную дробь, перевода числа из одной системы счисления в другую и т. д. [11; 12].

Выводы

Таким образом, мы доказали методическую целесообразность использования алгоритмов как средства реализации интегративного подхода в обучении математике. На основе анализа истории вопроса, сути и свойств понятия алгоритма, места алгоритмического подхода в математике, информатике, других областях научного знания, в повседневной жизни был обоснован выбор алгоритмов как одного из объектов знаниевого остова обучающихся любого образовательного уровня на основе взаимопроникающих принципов фундаментальности, прикладной направленности, интегративности и междисциплинарности.

Опыт работы авторов со студентами и выпускниками Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета позволяет говорить об эффективности использования предложенного подхода при обучении математике студентов (преподавание базовых дисциплин предметной подготовки, дисциплин по выбору, организации исследовательской деятельности) и школьников (преподавание учебных курсов, курсов внеурочной деятельности, организация проектной и исследовательской деятельности).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Деза Е. И. Подготовка учителя математики в условиях вариативного образования. М.: Прометей, 2012.
2. Деза Е. И. Вопросы фундаментализации предметной подготовки учителя математики // Наука и школа. 2021. № 6. С. 115–124.
3. Деза Е. И., Стесева О. И., Котова Л. В. О роли числовых алгоритмов в реализации деятельностного подхода к предметной подготовке учителя математики и информатики // Деятельностная педагогика и педагогическое образование: сб. тез. X Междунар. конф. «ДППО-2022». Воронеж: Воронежский ин-т развития образования, 2022. С. 70–73.
4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. Т. 1, 2. М.: Наука, 1970.
5. Dickson L. E. History of the theory of numbers. New York: Dover Publications, 2005.
6. Кнут Д. Искусство программирования. Т. 1. Фундаментальные алгоритмы. М.: Вильямс, 2006.
7. Бхаргава А. Грожаем алгоритмы. СПб.: Питер, 2019.
8. Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987.
9. Марков А. А. Математическая логика и вычислительная математика // Вестник Академии наук СССР. 1957. № 8. С. 21–25.
10. Колмогоров А. Н. О понятии алгоритма // Успехи математических наук. 1953. Т. 8, Вып. 4 (56). С. 175–176.
11. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.
12. Деза Е. И., Котова Л. В. Сборник задач по теории чисел. М.: URSS, 2010.
13. Деза Е. И., Котова Л. В. Введение в криптографию: теоретико-числовые основы защиты информации. М.: URSS, 2018.
14. Деза Е. И., Модель Д. Л. Основы дискретной математики. М.: URSS, 2024.
15. Деза Е. И., Стесева О. И. О месте рекуррентных соотношений в предметной подготовке учителя математики // Математическая подготовка в школе и вузе: содержание и технологии: материалы 43-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. С. 44–48.
16. Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда. М.: URSS, 2015.
17. Деза Е. И., Шахов Ю. Н. Численные методы. М.: URSS, 2010.
18. Ершов А. П., Звенигородский Г. Г. Зачем нужно уметь программировать? // Квант. 1979. № 9. С. 47–51.

REFERENCES

1. Deza E. I. *Podgotovka uchitelya matematiki v usloviyakh variativnogo obrazovaniya*. Moscow: Prometey, 2012.
2. Deza E. I. Voprosy fundamentalizatsii predmetnoy podgotovki uchitelya matematiki. *Nauka i shkola*. 2021, No. 6, pp. 115–124.
3. Deza E. I., Steseva O. I., Kotova L. V. O roli chislovykh algoritmov v realizatsii deyatel'nostnogo podkhoda k predmetnoy podgotovke uchitelya matematiki i informatiki. In: *Deyatel'nostnaya pedagogika i pedagogicheskoe obrazovanie. Proceedings of the X International conference "DPPO-2022"*. Voronezh: Voronezhskiy in-t razvitiya obrazovaniya, 2022. Pp. 70–73.
4. Istoriya matematiki s drevneyshikh vremen do nachala XIX stoletiya. Ed. by A. P. Yushkevich. Vol. 1, 2. Moscow: Nauka, 1970.
5. Dickson L. E. *History of the theory of numbers*. New York: Dover Publications, 2005.

6. Knut D. *Iskusstvo programmirovaniya*. Vol. 1. Fundamentalnye algoritmy. Moscow: Vilyams, 2006.
7. Bkhargava A. *Grokaem algoritmy*. St. Petersburg: Piter, 2019.
8. Uspenskiy V. A., Semenov A. L. *Teoriya algoritmov: osnovnye otkrytiya i prilozheniya*. Moscow: Nauka, 1987.
9. Markov A. A. Matematicheskaya logika i vychislitelnaya matematika. *Vestnik Akademii nauk SSSR*. 1957, No. 8, pp. 21–25.
10. Kolmogorov A. N. O ponyatii algoritma. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1953, Vol. 8, Iss. 4 (56), pp. 175–176.
11. Bukhshtab A. A. *Teoriya chisel*. Moscow: Prosveshchenie, 1966.
12. Deza E. I., Kotova L. V. *Sbornik zadach po teorii chisel*. Moscow: URSS, 2010.
13. Deza E. I., Kotova L. V. *Vvedenie v kriptografiyu: teoretiko-chislovye osnovy zashchity informatsii*. Moscow: URSS, 2018.
14. Deza E. I., Model D. L. *Osnovy diskretnoy matematiki*. Moscow: URSS, 2024.
15. Deza E. I., Steseva O. I. O meste rekurrentnykh sootnosheniy v predmetnoy podgotovke uchitelya matematiki. In: *Matematicheskaya podgotovka v shkole i vuze: sodержanie i tekhnologii. Proceedings of the 43 International scientific seminar seminar for teachers of mathematics and computer science from universities and pedagogical institutes*. Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2024. Pp. 44–48.
16. Deza E. I. *Spetsialnye chisla naturalnogo ryada*. Moscow: URSS, 2015.
17. Deza E. I., Shakhov Yu. N. *Chislennyye metody*. Moscow: URSS, 2010.
18. Ershov A. P., Zvenigorodskiy G. G. Zachem nuzhno umet programmirovat? *Kvant*. 1979, No. 9, pp. 47–51.

Деза Елена Ивановна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики института математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

Deza Elena I., ScD in Education, Full Professor, Professor, Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Статья поступила в редакцию 15.12.2025; принята к публикации 12.01.2026
The article was submitted 15.12.2025; accepted for publication 12.01.2026