**УДК 373.5+378.1**
**ББК 74.26+74.48**

DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-185-196

**5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания**

# РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАТИВНОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

**Е. И. Деза, Д. Л. Модель**

**Аннотация.** *В статье рассмотрены вопросы использования рекуррентного метода в математике как средства реализации интегративного (энциклопедического) подхода при обучении математике школьников и студентов педвуза – будущих учителей математики и информатики. Раскрыта суть интегративного подхода к формированию содержания современного отечественного математического образования. Выявлены особенности рекуррентного метода, обеспечивающие эффективность его использования при реализации интегративного подхода в обучении математике. Приведены примеры использования рекуррентных соотношений в фундаментальной и прикладной математической науке, в информатике и программировании, в других областях знания, в школьном курсе математики и информатики. Проанализировано место специальных чисел натурального ряда как важной составной части теории рекуррентных соотношений. Предложена методика использования рекуррентных соотношений как интегративной составляющей «знаниевого остова» школьников и студентов, формируемого при обучении математике.*

**Ключевые слова:** *содержание математического образования, интегративный подход, рекуррентное соотношение, числа Фибоначчи, треугольник Паскаля, специальные числа натурального ряда, учебно-исследовательская деятельность.*

**Для цитирования:** *Деза Е. И., Модель Д. Л.* Рекуррентные соотношения как средство реализации интегративного подхода при обучении математике // Наука и школа. 2025. № 6. С. 185–196. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-185-196.

# RECURRENT RELATIONS AS A MEANS OF IMPLEMENTING AN INTEGRATIVE APPROACH IN TEACHING MATHEMATICS

**E. I. Deza, D. L. Model**

**Abstract.** *In the article the use of the recurrent method in mathematics as a means of implementing an integrative (encyclopedic) approach to mathematical education of schoolchildren and students of a pedagogical university – future teachers of mathematics and computer science – is considered. The essence of the integrative approach to the formation of the content of modern Russian mathematical education is disclosed. Features of the recurrent method that ensure its effectiveness in implementing an integrative approach to teaching maths are identified. Examples of the use of recurrent relations in fundamental and applied mathematical science, in computer science and programming, in other areas of knowledge, in the school course of mathematics and computer science are given. The place of special positive integer numbers as an important part of the theory of recurrent relations is analyzed. A method of using recurrent relations as an integrative component of the knowledge framework of schoolchildren and students formed when teaching mathematics is proposed.*

**Keywords:** *content of mathematical education, integrative approach, recurrence relation, Fibonacci numbers, Pascal triangle, special positive integer numbers, educational and research activities.*

**Cite as:** Deza E. I., Model D. L. Recurrent Relations as a Means of Implementing an Integrative Approach in Teaching Mathematics. *Nauka i shkola.* 2025, No. 6, pp. 185–196. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-185-196.

## Постановка проблемы

Состояние отечественной образовательной системы характеризуется сегодня наличием ряда существенных проблем, связанных с реалиями современного цифрового общества. Одной из самых актуальных является проблема построения нового содержания образования. Вопросы о том, что в классическом содержании следует сохранить, от чего пора отказаться, что добавить, активно обсуждаются учеными-методистами, педагогами-практиками, широкой общественностью. Проблема эта глобальна, она касается всех уровней образования и всех предметных областей.

Одним из возможных методов решения указанной проблемы может служить *интегративный подход*. Именно выделяя в содержании той или иной области знания основополагающие, ключевые понятия и осознанно акцентируя на них внимание при изложении широкого спектра вопросов, мы получаем возможность использовать указанные понятия в качестве базы знаний обучающихся в данной предметной области.

Если речь идет о модернизации содержания математического образования, то под *интегративным подходом к формированию содержания математической подготовки обучающихся* (прежде всего, школьников и студентов педвуза, будущих учителей математики) мы понимаем выделение фундаментальных, базовых (другими словами, *интегративных*) математических объектов, понятий, методов, и их системное, «сквозное» рассмотрение в рамках всех изучаемых учебных курсов с целью создания у каждого обучающегося «знаниевого остова» [1; 2]. Обсуждая эти понятия и связанные с ними утверждения и факты при знакомстве школьников и студентов с различными проблемами арифметики, алгебры, анализа, дискретной математики, информатики и др., мы формируем у обучающихся важное интегративное качество. Оно заключается в осознании того, что во всех рассматриваемых, зачастую очень отличающихся друг от друга вопросах речь идет об одной и той же математической конструкции, лежащей в основе целой ветви общего математического знания. Такое осознание поможет обучающимся не только систематизировать уже полученную информацию, но и облегчит самостоятельное знакомство с другими проблемами, так или иначе связанными с этой базовой математической структурой.

На наш взгляд, в список основополагающих следует включить понятия «число», «расстояние» («метрика»), «алгоритм» и др. Мы неоднократно анализировали возможности использования данных математических объектов для решения соответствующих проблем [3; 4]. Покажем, что методически целесообразным является добавление в данный список понятия «*рекуррентность*» [5].

## Особенности рекуррентного метода

Основания для выделения *рекуррентных соотношений* как одного из интегративных математических объектов достаточно весомы и опираются на ряд *особенностей* использования *рекуррентного метода* в математической науке и математическом образовании.

Во-первых, рекуррентные методы математических исследований, конструкций и доказательств имеют глубочайшие *исторические корни*, уходящие в античную науку. Как следствие, рекуррентный подход связан с множеством классических математических объектов, с именами многих великих ученых, с историей возникновения и построения ряда фундаментальных математических теорий. Знакомство обучающихся с указанными аспектами повышает их общую и математическую культуру, усиливает интерес к изучаемой тематике, дает дополнительную мотивацию.

Во-вторых, следует отметить *широкий спектр* фундаментальных и прикладных математических *проблем* различной тематики и различного уровня сложности, от простейших до научно-исследовательских, решаемых с помощью рекуррентного метода. Это обогащает инструментарий предлагаемой нами методики, дает возможность организовать максимально индивидуализированное освоение рекуррентного метода каждым обучающимся, полностью отвечающее его способностям, предпочтениям и уровню предварительной предметной подготовки.

В-третьих, рекуррентный подход является эффективным *инструментом дискретного анализа*. За последние три-четыре десятилетия дискретная математика заняла важное и заслуженное место рядом с математикой непрерывной не только в математической науке, но и, что не менее важно, в математическом образовании. Поэтому использование в обучении математике школьников и студентов широкого спектра задач, решаемых рекуррентным методом, методически целесообразно. Это способствует формированию у обучающихся современного, дискретного стиля мышления.

В-четвертых, освоение рекуррентных методов способствует эффективной адаптации индивида к реалиям современного цифрового общества, поскольку именно рекуррентные (рекурсивные) модели крайне востребованы в различных областях информатики. Осознание наличия рекуррентного подхода при реализации большинства классических алгоритмов, при построении множества вычислительных схем, умение видеть и анализировать рекуррентные приемы может помочь при решении той или иной конкретной задачи, в том числе сугубо практической.

Наконец, если речь идет о математической подготовке школьников и, как следствие, студентов – будущих учителей математики и информатики, важным становится еще один аспект. Дело в том, что рекуррентные соотношения имеют тесную *связь* не только с современными научными тенденциями, но и *со школьным курсом математики*. Два классических объекта школьной математики – арифметическая и геометрическая прогрессии – являются знаковыми примерами рекуррентного построения числового множества (последовательности). Кроме того, рекуррентными свойствами обладают и практически все комбинаторные конфигурации, являющиеся важной составной частью учебного курса «Вероятность и статистика». Просто обычно внимание на рекуррентной природе рассматриваемых математических объектов не акцентируется. Что ж, самое время расставить акценты так, как требует современное состояние дел. Это несложно.

Выделенные особенности позволяют утверждать, что при формировании содержания математической подготовки школьников и студентов методически целесообразно осознанное выделение рекуррентного метода как одного из «сквозных» методов математической науки, повсеместно применяемого при решении множества проблем. Рекуррентные соотношения как интегративная составляющая математической подготовки школьников и студентов-математиков могут способствовать повышению качества обучения, формированию у обучающихся базовых и профессиональных компетенций, необходимых для дальнейшей работы по специальности и для повседневной жизни. Понимание единой схемы реализации метода математической индукции, использования алгоритма Евклида, построения арифметической и геометрической прогрессий, формирования треугольника Паскаля и др. безусловно пойдет на пользу каждому индивиду: позволит систематизировать имеющиеся предметные знания, взглянуть на них, в том числе на школьную математику, «сверху»; обогатит профессиональный, общекультурный и «каждодневный» инструментарий любого человека, от школьника до специалиста-педагога [1; 3; 5].

## Примеры использования рекуррентного подхода в математической науке и образовании

Суть рекуррентного метода заключается в получении информации о текущем объекте с использованием имеющейся информации об одном или нескольких предыдущих объектах. Другими словами, задав ряд начальных условий, мы получаем возможность вычислять элементы интересующей нас последовательности (множества, таблицы, многомерного массива), на каждом шаге возвращаясь к построенным ранее элементам.

■ Наиболее известным рекуррентным соотношением является формула

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, u_1 = u_2 = 1$$

для получения *чисел Фибоначчи*. Пошагово реализуя представленную выше рекуррентную схему, то есть, стартуя с двух единиц, вычисляя каждый следующий элемент как сумму двух предыдущих, мы получаем последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … , хорошо знакомую каждому математику. Заменив начальные условия и сохранив рекуррентный закон построения, мы можем получить последовательность 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, … *чисел Люка* [6].

Хорошо знакома специалистам и двумерная рекуррентная схема построения *треугольника Паскаля*. Стартуя с единиц в вершине и по сторонам равнобедренного треугольника, мы получаем каждый внутренний элемент текущей строки нашей арифметической конструкции как сумму двух чисел предыдущей строки, расположенных непосредственно над ним:

$$T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k, T_0^0 = T_n^0 = T_n^n, n, k \in N, k < n.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Опираясь на используемое рекуррентное определение, нетрудно доказать, что треугольник Паскаля состоит из чисел сочетаний $C_n^k$, или, что то же, из биномиальных коэффициентов:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n.$$

Для этого достаточно убедиться, что и числа сочетаний, и биномиальные коэффициенты удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению с теми же начальными условиями, что и элементы треугольника Паскаля [6].

Примеры рекуррентного построения числовых множеств многочисленны и разнообразны [7]. Мы еще вернемся к этому вопросу.

■ С другой стороны, нетрудно видеть, что рекуррентные «корни» имеет классический *метод математической индукции*. Действительно, стартуя с базы индукции, то есть, проверяя доказываемое утверждение для $n = 1$ (начальное условие), мы реализуем индукционный шаг, возвращаясь при рассмотрении случая $n = k + 1$ к предыдущему случаю $n = k$.

Таким образом, рекуррентные корни имеет и *аксиома индукции*, лежащая в основе построения аксиоматической теории натуральных чисел и, следовательно, всех классических числовых систем. Стартуя с единицы (начальное условие), мы получаем каждое следующее натуральное число как сумму предыдущего натурального числа и единицы. Классический рекуррентный подход. Неожиданная связь, обнаруженная нами между двумя фундаментальными математическими объектами, «число» и «рекуррентность», на самом деле неожиданной (точнее, случайной), конечно, не является.

■ Нетрудно найти рекуррентную составляющую и в ходе реализации *алгоритма Евклида*:

$$a = bq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < b,$$

$$b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1,$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2,$$

$$\dots$$

$$r_{s-2} = r_{s-1} q_s + r_s,\ 0 < r_s < r_{s-1},$$

$$r_{s-1} = r_s q_{s+1}.$$

Именно начав процесс нахождения наибольшего общего делителя (как последнего ненулевого остатка алгоритма Евклида) двух натуральных чисел $a$ и $b$ с деления $a$ на $b$ с остатком (начальное условие), мы реализуем каждый следующий шаг алгоритма (если он определен), возвращаясь к шагу предыдущему, то есть деля с остатком «предыдущий» делитель на соответствующий ненулевой остаток.

Заинтересованный читатель легко убедиться в рекуррентной природе многих других классических алгоритмов, включая алгоритмы арифметических действий.

■ В этой связи нетрудно увидеть «мостик», связывающей рекуррентный (рекурсивный) подход с теорией алгоритмов, вычислительной математикой, информатикой и программированием.

В частности, рекуррентным образом строится «приближающая» последовательность $\{x_n\}_n$ в *теореме о сжимающем отображении* [8]. Данная теорема является основой итерационных методов численного анализа и состоит в следующем. Если отображение $A$ является сжимающим отображением полного метрического пространства $(M,d)$ в себя, то уравнение $x = A(x)$ имеет единственное решение $x^* \in M$. При этом элемент $x^*$ можно получить как предел последовательности $\{x_n\}_n$, в которой каждый следующий элемент представляет собой образ предыдущего при отображении $A$: $x_{n+1} = A(x_n)$. Стартовать мы можем с любого элемента $x_0$ множества $M$ (начальное условие).

Впрочем, рекуррентный принцип можно выделить в организации работы любого цикла в программировании. Добавим в рассмотрение и теорию рекурсивных функций.

Заметим, что появление при обсуждении теоремы о сжимающем отображении еще одного базового математического объекта, метрики, вновь не является случайным. Интегративный характер имеет сама логика построения математической науки, главное – вовремя это увидеть и грамотно использовать.

■ Классическими рекуррентными объектами школьной математики[1] являются арифметическая прогрессия $\{a_n\}_n$, и геометрическая прогрессия $\{b_n\}_n$. Стартуя

[1] Федеральный государственный стандарт основного общего образования. М., 2021. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia (дата обращения: 29.10.2025); Федеральный государственный стандарт среднего общего образования. М., 2022. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (дата обращения: 29.10.2025); Примерные рабочие программы учебного предмета «Математика» для образовательных организаций. М., 2022. URL: https://fgosreestr.ru/oop?sub=16 (дата обращения: 29.10.2025).

с начальных элементов $a_0$ и $b_0$, соответственно, мы получаем каждый следующий элемент из предыдущего, в первом случае путем добавления разности $d$, $a_{n+1} = a_n + d$, во втором – путем умножения на знаменатель $q$, $b_{n+1} = qb_n$.

Заметим, что рекуррентную природу имеют и комбинаторные конструкции, которые в последние годы изучаются в школе в рамках учебного курса «Вероятность и статистика» [9]. Про *числа сочетаний* $C_n^k$ мы уже упоминали:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, C_0^0 = C_n^0 = C_n^n, n, k \in N, k < n.$$

Однако и *числа размещений* $A_n^k$ подчиняются рекуррентному закону, впрочем, существенно более простому:

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n-k+1), A_n^0 = 1, n, k \in N, k \le n.$$

Похожая рекуррентная зависимость имеет место и для *числа* $P_n$ *перестановок*:

$$P_n = nP_{n-1}, P_1 = 1.$$

Отсюда можно перейти к рекуррентной схеме построения последовательности *факториалов* $1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$, в которой, стартуя с $1$, каждый следующий член *n!* получается из предыдущего члена умножением на $n$.

Впрочем, многие известные *последовательности* получаются рекуррентным образом. Помимо уже упомянутых арифметической и геометрической прогрессий, последовательностей Фибоначчи и Люка, последовательности факториалов можно упомянуть, например, последовательность $2, 6, 30, p_1p_2 \ldots p_n$, ... *праймориалов*. Стартуя с двойки, мы получаем каждый следующий элемент $p_1p_2 \ldots p_{n-1}$ последовательности умножением предыдущего элемента на «текущее», $n$-е простое число $p_n$.

Пожалуй, самое большое число примеров последовательностей, построенных рекуррентным образом, мы найдем, перейдя к рассмотрению теории специальных чисел.

## Рекуррентные соотношения и специальные числа

Высоким методическим потенциалом в контексте решения рассматриваемой проблемы обладают различные классы специальных чисел [1–3; 7, 10; 11]. Действительно, очень часто именно специальные числа допускают несложное рекуррентное построение. Вспомним упомянутые выше *числа Фибоначчи, числа Люка*, *элементы треугольника Паскаля.* Добавим к рассмотрению *фигурные числа* (многоугольные, центральные многоугольные, пирамидальные, кубические и др.) [10]. В частности, $m$-угольные числа $S_m(n)$, подчиняющиеся простейшей рекуррентности:

$$S_m(n) = S_m(n-1) + (m-2)(n-1) + 1, S_m(1) = 1.$$

Аналогичным образом можно получить на основании рекуррентного определения множества *чисел Стирлинга* первого и второго рода [11]. Допускают естественное рекуррентное построение *числа Каталана, числа Моцкина, числа Шредера, числа Нараяны, числа Эйлера первого и второго порядка* [11]. Интересные рекуррентные подходы имеют место при изучении *совершенных и дружественных чисел* [7]. Подчиняются рекуррентному закону *числа Ферма* и *числа Мерсенна* [7]. Список можно продолжать.

При этом при изучении различных классов специальных чисел мы имеем возможность познакомиться с целым спектром классических рекуррентностей, от простейших до весьма сложных. Это позволяет глубже освоить идею метода и приемы работы с рекурсивными объектами. Чтобы не быть голословными, приведем несколько примеров.

1. *Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами*. Каждый следующий элемент последовательности $f_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, зависит от одного, двух или нескольких предыдущих, причем зависимость линейная, а используемые коэффициенты – абсолютные постоянные. Простейшие рекуррентности, допускающие получение явных формул $f_n = f(n)$ по единому классическому алгоритму. С помощью таких рекуррентных соотношений построены последовательности Фибоначчи и Люка, а также родственные им числовые множества. Такому же рекуррентному закону подчиняется геометрическая прогрессия. Для арифметической прогрессии такой закон нужно еще получить. Нетрудно показать, что в этом случае $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Аналогичные соображения приведут к линейным рекуррентным соотношениям для плоских и пространственные фигурных чисел. Добавим в список суммы $k$-х степеней ($k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$) первых $n$ натуральных чисел, связанные с *числами Бернулли*. Примеров такого рода существует много [6].

2. *Рекуррентности «каталановского» типа*. Каждый следующий элемент последовательности $f_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, зависит от всех предыдущих элементов, причем зависимость нелинейная; как правило, рассматриваются те или иные суммы попарных произведений предыдущих элементов последовательности. Так, $n$-е число Каталана $C_n$ определяется следующим образом:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0, C_0 = 1.$$

Аналогично можно построить *числа Моцкина, числа Шредера* и т. д. [11].

3. Наиболее известной *двумерной рекуррентностью* является закон построения *треугольника Паскаля*. Каждый внутренний элемент $n$-й строки вычисляется как сумма двух элементов предыдущей строки, расположенных непосредственно над вычисляемым: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; крайние элементы любой строки считаем равными единице. Аналогичным рекуррентным соотношениям подчиняются *числа Стирлинга* второго и первого рода, *числа Лаха, числа Эйлера* первого и второго порядка и т. д. Похожие *рекуррентные трехмерные правила* определяют построение множества *чисел Нараяны, обобщенных треугольников Паскаля* и *пирамиды Паскаля* [11].

4. Существуют и другие, гораздо более экзотические рекуррентные подходы к построению числовых объектов; достаточно упомянуть современные рекуррентные методы нахождения больших пифагоровых троек, пар дружественных чисел и т. д. Такие подсчеты тесно связаны с современными вычислительными методами, опирающимися на компьютерные технологии [7].

## Рекуррентные соотношения как содержательная база реализации интегративного подхода при обучении математике

Проведенный анализ федеральных государственных образовательных стандартов, программ, учебников и учебных пособий, специальной литературы позволяет утверждать, что мы встречаемся с рекуррентным подходом во многих разделах теоретической математики, в прикладных задачах и даже в других областях знания. Таким образом, в ходе математической подготовки обучающихся, прежде всего школьников и, как следствие, студентов – будущих учителей математики, методически целесообразно осознанное выделение рекуррентного метода как одного из «сквозных» методов математической науки, повсеместно применяемого при решении множества проблем. Систематическое знакомство с разнообразными примерами использования указанного метода позволит школьникам и студентам эффективно обрабатывать получаемую информацию, естественным образом интегрируя новые задачи в уже имеющийся у них знаниевый остов.

Такое знакомство можно и нужно реализовывать прежде всего при освоении основных учебных курсов (школьники) и фундаментальных дисциплин предметного модуля (студенты). Вернемся к уже упомянутым классическим примерам использования рекуррентного подхода в арифметике, теории чисел и алгебре (алгоритм Евклида и другие числовые алгоритмы, метод математической индукции, арифметическая и геометрическая прогрессии), в комбинаторике (рекуррентные свойства комбинаторных конфигураций), в математическом анализе (рекуррентное построение числовых последовательностей), в вычислительной математике (итерационные методы численного анализа) и программировании. Заметим, что любое обсуждение рекуррентного подхода допускает множество авторских вариаций. Так, еще раз обратимся, например, к *фигурным числам*. *Треугольное* (*квадратное, ... , $m$-угольное*) число определяется как количество точек, при помощи которых можно построить на плоскости фигуру, изображающую правильный треугольник (квадрат, ..., $m$-угольник). Другими словами, $n$-е $m$-угольное число представляет собой сумму $n$ первых элементов арифметической прогрессии с разностью $m-2$, начинающейся с $1$. Крайне просто. Но какие возможности для вариативного изучения темы «Прогрессии»!

Целесообразным является, с другой стороны, изложение теории многоугольных чисел в рамках посвященного им специального курса. Это может быть курс внеурочной деятельности для школьников или дисциплина по выбору в педагогическом вузе. Такой курс позволит продемонстрировать на удобном, многоплановом, интересном с точки зрения истории математики материале весь арсенал рекуррентного подхода. Рекуррентное определение, получение явной формулы, построение производящей функции, доказательство свойств соответствующей последовательности – стандартная схема, естественным образом реализуемая в данном случае. При желании можно углубиться в тему, построив соответствующую теорию для *пирамидальных чисел* (трехмерных аналогов многоугольных чисел), кубических чисел и в целом для целого спектра различных классов числовых конструкций, имеющих право называться фигурными. С другой стороны, доказательство теоремы Ферма, утверждающей, что любое натуральное число представимо в виде суммы $m$ $m$-угольных чисел, позволит продемонстрировать студентам красоту, серьезные математические инструменты и приложения фундаментальной теории чисел. Безусловно, спецкурс может быть посвящен и любому другому классу специальных чисел. Такие курсы для современной общеобразовательной школы мы вместе со своими учениками уже давно разрабатываем в рамках подготовки выпускных квалификационных работ бакалавра и магистерских диссертаций в стенах Института математики и информатики МПГУ. Многолетний опыт позволяет говорить о эффективности их использования в практике работы современной школы.

Вышесказанное позволяет естественным образом перейти еще к одному аспекту проблематики. А именно можно утверждать, что рекуррентные соотношения могут служить полезным инструментом для организации самостоятельной учебно-исследовательской и проектной деятельности обучающихся. Мы неоднократно обращались к данной проблеме, обсуждая методические возможности различных классов специальных чисел как содержательной основы фундаментальных и научно-методических исследований студентов (см., например, [1; 2]). Однако нет никаких ограничений на использование «рекуррентной» тематики при организации проектной и исследовательской деятельности школьников. Более того, было бы крайне интересно реализовать работы такого рода, опираясь не только на теорию специальных чисел. Ждут своих исследователей такие темы, как, например, «История метода математической индукции», «Рекурсивные функции в математике и информатике», «Классические числовые алгоритмы и их рекуррентная природа», «Итерационные методы численного анализа».

При этом выделенные ранее особенности рекуррентного метода – глубокие исторические корни, крайне широкий спектр решаемых этим методом математических проблем различной тематики и различного уровня сложности, естественная связь с информатикой и другими областями современной науки, корреляция со школьными курсами математики и информатики – дают возможность организовать учебное исследование максимально эффективно. Обучающемуся предоставляется широкий выбор объектов для возможного исследования и в дальнейшем разнообразие связанных с ними задач, от фундаментальных математических до занимательных школьных. Это позволяет максимально индивидуализировать учебно-исследовательскую работу, регулировать, в зависимости от предпочтений и возможностей студента, ее уровень и направленность. Кто-то выберет фундаментальные вопросы, кто-то рассмотрит вычислительные аспекты, связанные с современными компьютерными технологиями, кто-то займется решением задач, связанных со школьной математикой [2; 3].

## Выводы

Итак, мы рассмотрели ряд проблем, связанных с использованием рекуррентных соотношений как средства реализации интегративного (энциклопедического) подхода при обучении математике. Обобщим сказанное.

Во-первых, теория рекуррентных соотношений является важной составной частью многих разделов математической науки и ряда учебных математических курсов как на уровне общего образования, так и на уровне высшего педагогического образования, что определяет методическую целесообразность предложенного выше интегративного («сквозного») подхода к изучению элементов данной теории в ходе математической подготовки обучающихся.

Во-вторых, широкий спектр задач, связанных с теорией рекуррентных соотношений, позволяет разработать и внедрить в образовательную практику многоплановую систему курсов по выбору, посвященных теоретическим и прикладным аспектам рассматриваемой тематики, организовать эффективную индивидуальную исследовательскую деятельность обучающихся в рамках выполнения учебных проектов (школьники), курсовых работ, выпускных квалификационных работ бакалавра и магистерских диссертаций (студенты).

Такой подход к изучению темы «Рекуррентные соотношения» позволит решить ряд важных методических задач: расширить, углубить и систематизировать математические знания обучающихся, внести вклад в формирование у обучающихся понимания единства математической науки, ее основополагающей роли в решении множества актуальных практических задач, сформировать положительное отношение обучающихся к математике, повысить их мотивацию к изучению математики как на базовом, так и на углубленном уровне.

Опыт работы авторов со студентами и выпускниками Института математики и информатики МПГУ позволяет говорить об эффективности использования предложенного подхода при обучении математике студентов (преподавание базовых дисциплин предметной подготовки, дисциплин по выбору, организации исследовательской деятельности) и школьников (преподавание учебных курсов, курсов внеурочной деятельности, организация проектной и исследовательской деятельности).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Деза Е. И.* Индивидуальные траектории предметной подготовки учителя математики в системе вариативного образования. М.: Прометей, 2011.
2. *Деза Е. И.* Подготовка учителя математики в условиях вариативного образования. М.: Прометей, 2012.
3. *Деза Е. И.* Вопросы фундаментализации предметной подготовки учителя математики // Наука и школа. 2021. № 6. С. 115–124.
4. *Деза Е. И., Стесева О. И., Котова Л. В.* О роли числовых алгоритмов в реализации деятельностного подхода к предметной подготовке учителя математики и информатики // Деятельностная педагогика и педагогическое образование: сб. тезисов X Междунар. конф. «ДППО-2022». Воронеж: Воронежский ин-т развития образования, 2022. С. 70–73.
5. *Деза Е. И., Стесева О. И.* О месте рекуррентных соотношений в предметной подготовке учителя математики // Математическая подготовка в школе и вузе: содержание и технологии: материалы 43-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. С. 44–48.
6. *Деза Е. И., Модель Д. Л.* Основы дискретной математики. М.: URSS, 2024.
7. *Деза Е. И.* Специальные числа натурального ряда. М.: URSS, 2015.
8. *Деза Е. И., Шахов Ю. Н.* Численные методы. М.: URSS, 2010.
9. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226.
10. *Деза Е. И.* Фигурные числа. М.: МЦНМО, 2016.
11. *Деза Е. И.* Специальные комбинаторные числа. М.: URSS, 2018.

## REFERENCES

1. Deza E. I. *Individualnye traektorii predmetnoy podgotovki uchitelya matematiki v sisteme variativnogo obrazovaniya*. Moscow: Prometey, 2011.
2. Deza E. I. *Podgotovka uchitelya matematiki v usloviyakh variativnogo obrazovaniya*. Moscow: Prometey, 2012.
3. Deza E. I. Voprosy fundamentalizacii predmetnoj podgotovki uchitelya matematiki. *Nauka i shkola*. 2021, No. 6, pp. 115–124.
4. Deza E .I., Steseva O. I., Kotova L. V. O roli chislovykh algoritmov v realizatsii deyatelnostnogo podkhoda k predmetnoy podgotovke uchitelya matematiki i informatiki. In: Deyatelnostnaya pedagogika i pedagogicheskoe obrazovanie. *Proceedings of the X International conference "DPPO-2022"*. Voronezh: Voronezhskiy in-t razvitiya obrazovaniya, 2022. Pp. 70–73.

5. Deza E. I., Steseva O. I. O meste rekurrentnyh sootnoshenij v predmetnoj podgotovke uchitelya matematiki. In: Matematicheskaya podgotovka v shkole i vuze: soderzhanie i tekhnologii. *Proceedings of the 43rd International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Computer Science of Universities and Pedagogical Universities.* Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2024. Pp. 44–48.
6. Deza E. I., Model D. L. *Osnovy diskretnoy matematiki.* Moscow: URSS, 2024.
7. Deza E. I. *Spetsialnye chisla naturalnogo ryada.* Moscow: URSS, 2015.
8. Deza E. I., Shakhov Yu. N. *Chislennye metody.* Moscow: URSS, 2010.
9. Vetohin A. N., Deza E. I. O meste teoretiko-veroyatnostnykh zadach v matematicheskoy podgotovke shkolnikov. *Nauka i shkola.* 2023, No. 2, pp. 214–226.
10. Deza E. I. *Figurnye chisla.* Moscow: MTsNMO, 2016.
11. Deza E. I. *Spetsialnye kombinatornye chisla.* Moscow: URSS, 2018.

**Деза Елена Ивановна,** доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики Института математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

**e-mail: Elena.Deza@gmail.com**

**Deza Elena I.,** ScD in Education, Full Professor, Professor, Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

**e-mail:Elena.Deza@gmail.com**

**Модель Дмитрий Лазаревич,** директор Школы № 2016 города Москвы

**e-mail: dmodel80@gmail.com**

**Model Dmitry L.,** Headteacher, Moscow School No. 2016

**e-mail: dmodel80@gmail.com**

*Статья поступила в редакцию 01.11.2025*
*The article was received on 01.11.2025*