УДК 512.13
ББК 22.141

DOI: 10.31862/1819-463X-2020-6-176-182

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

А. Л. Плетнев, Л. А. Плетнева

Аннотация. *В статье рассмотрены некоторые особенности решения геометрических и логических задач математической олимпиады школьников «Шаг в будущее», проходившей в 2018 и 2019 гг., организатором которой является Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана. Приводятся авторские решения некоторых из них, что дает представление об уровне требований и подготовки школьников. Показаны подходы и методы решения сложных математических задач, которые способствуют развитию специфики мышления и формируют положительный мотив к процессу обучения школьников.*

Ключевые слова: *олимпиада, математика, геометрия, олимпиада школьников, олимпиада по математике.*

FEATURES OF SOLVING GEOMETRIC AND LOGICAL PROBLEMS ON THE EXAMPLE OF “STEP TO THE FUTURE” OLYMPIAD

A. L. Pletnev, L. A. Pletneva

Abstract. *The article deals with some features of solving geometric and logical problems of the „Step to the Future” mathematics Olympiad of schoolchildren, which was held in 2018 and 2019 and was organized by Bauman Moscow State Technical University. The author’s solutions of some of them are presented, which gives an idea of the level of requirements and training of schoolchildren. The approaches and methods of solving complex mathematical problems that contribute to the development of specific thinking and form a positive motive for the process of teaching students are shown.*

Keywords: *Olympiad, mathematics, geometry, school Olympiad, mathematical Olympiad.*

Данная статья посвящена математической олимпиаде среди школьников девятых и десятых классов «Шаг в будущее», которая ежегодно проводится Московским государственным техническим университетом имени Н. Э. Баумана. В последние годы предметные олимпиады, проводимые тем или иным вузом, становятся не только прекрасным средством популяризации науки среди молодежи, но и способствуют вузам в отборе талантливых ее представителей для дальнейшего обучения их в своих стенах.

Основная задача абитуриентов – поступить в вуз на выбранную ими специальность. Для этого им необходимо как можно лучше сдать школьный курс в формате единого государственного экзамена. Важным дополнительным фактором для поступления является диплом предметной олимпиады.

С 2018 г. олимпиада «Шаг в будущее» проводится в два этапа. Первый этап проходит в период с 1 сентября по 31 декабря – это онлайн-тур, на котором школьнику предлагается решить девять задач и ввести только ответы к ним на компьютере. Если школьник успешно справился с задачами первого этапа или является призером олимпиады прошлого года, то он допускается ко второму, который проводится уже очно в период с 1 января по 31 марта. Школьнику приходит приглашение на участие в олимпиаде, которая проходит в здании МГТУ им. Н. Э. Баумана. Победители и призеры второго этапа получают соответствующие льготы при поступлении в вуз, которые сохраняются в течение двух последующих лет.

На протяжении нескольких лет авторы статьи являлись составителями задач для олимпиады, а также один из них входил в состав апелляционных комиссий. Накопленный опыт позволяет сделать вывод, что чаще всего ученики ошибаются при решении геометрических и логических задач. Для представления о сложности заданий первого онлайн-тура предлагается к решению следующий вариант 2018 г. Он снабжен ответами ко всем девяти задачам, а к некоторым приведены их авторские решения. А также приводятся решения некоторых задач онлайн-тура 2019 г.

Вариант онлайн-тура (10-й класс, 2018 г.)

№ 1 (9 баллов). Назовите наименьшее допустимое натуральное значение параметра a, при котором уравнение $ax - 3 = 0$ имеет положительное решение.

Ответ: 1.

№ 2 (9 баллов). Решите неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{18x-x^2-45}\right)\left(\left|x^2-14x+48\right|-\left|x-8\right|\right)}{\left|x+4\right|+\left|x-21\right|-\left|x+7\right|-\left|x-36\right|}\geq 0.$$

В ответе запишите сумму целых решений этого неравенства.

Ответ: 29.

№ 3 (9 баллов). При каких значениях параметра a уравнение

$$(a+2)(x^2-6x+8)^2-2(a-1)(x^2-6x+8)+a-3=0$$

имеет ровно два различных решения? В ответе укажите сумму целых значений a, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 4.

№ 4 (9 баллов). Решить уравнение

$$\frac{x-3}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-5}{x}+\ldots+\frac{3}{x}=5.$$

В ответ записать наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трех значащих цифр по правилам округления.

Ответ: 15.

№ 5 (12 баллов). В связи с неблагоприятными погодными условиями фермер собрал зерна на 10% меньше, чем в предыдущий год. Как изменится в процентах по сравнению с предыдущим годом его выручка от продажи зерна, если закупочная цена на зерно по сравнению с предыдущим годом повысилась на 15%. В ответе укажите количество процентов.

Ответ: 3,5.

№ 6 (12 баллов). Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35 x 35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых трех его клеток, образующих фигуру «уголок», обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Ответ: 595.

№ 7(12 баллов). Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120.

№ 8 (14 баллов). Внутри треугольника ABC выбрана точка M так, что угол BMC – прямой, а треугольник BMC равнобедренный. Расстояния от точки M до точки A прямой AB и прямой AC равны $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ соответственно. Найдите квадрат длины стороны BC.

Ответ: 260.

№ 9 (14 баллов). Решить уравнение

$$x^2+\frac{9x^2}{x^2+6x+9}=7\,.$$

В ответ записать значение выражения $x_0^3-4x_0$, где x_0 – наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, то округлить его до трех значащих цифр по правилам округления.

Ответ: 3.

Решение задачи 6. Закрашивать надо столбцами через один (рис. 1). Таким образом, будет закрашено $N\cdot\left[\frac{N}{2}\right]$ клеток (см. рис. 1). Это минимально возможное количество. Действительно, в каждой полоске $2\times N$ клеток должно быть не менее $2\cdot\left[\frac{N}{2}\right]$ закрашено. Поэтому в соседнем столбце рядом с неокрашенной клеткой обязательно есть закрашенная ($35\cdot17=595$).

Ответ: 595.

Замечание. Основная ошибка при решении данной задачи заключалась в том, что школьники неправильно выбирали вид раскраски. В основном указывали «шахматную» раскраску, при которой будет закрашено не менее $\left[\frac{N^2}{2}\right]$ клеток, что при нечетном N больше чем $N\cdot\left[\frac{N}{2}\right]$.

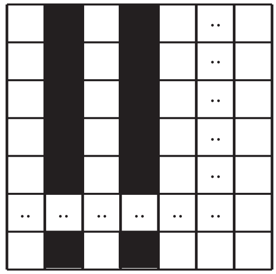

Рис. 1. К решению задачи 6, онлайн-тур, 10-й класс, 2018 г.

Решение задачи 8. Угол BAC – острый, так как $\angle BMC = 90°$. $AB \parallel MH$. Треугольник BKM равен треугольнику CHM по гипотенузе и острому углу ($BM = MC$, $\angle MBK = \angle BMH = \angle MCH$) следовательно, $KMHN$ – квадрат (рис. 2).

Далее только теорема Пифагора.

$AK^2 = AM^2 - MK^2 = 10 - 2 = 8.$

$AL^2 = AM^2 - ML^2 = 10 - 5 = 5.$

Пусть $BC = x$, $BM = y$, $BN = z$, $PC = t$.

$MB^2 = KB^2 + MK^2 = (KN + z)^2 + MK^2 = y^2.$

$MC^2 = LC^2 + ML^2 = (LP + t)^2 + ML^2 = y^2.$

Поэтому: $\left(\sqrt{2}+z\right)^2+2=\left(\sqrt{5}+t\right)^2+5$.

$PB^2 = CB^2 - PC^2 = AB^2 - AP^2$ или

$x^2-t^2=\left(3\sqrt{2}+z\right)^2-20\Rightarrow x^2=z^2+t^2+6\sqrt{2}z-2$.

$CN^2 = CB^2 - BN^2 = AC^2 - AN^2$ или

$x^2-z^2=\left(2\sqrt{5}+t\right)^2-18\Rightarrow x^2=z^2+t^2+4\sqrt{5}zt+2$.

Таким образом:

$$z=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{5}t+1\right)\Rightarrow t^2-2\sqrt{5}t-40=0,\left(t>0\right)\Rightarrow$$

$$t=4\sqrt{5},z=7\sqrt{2},x^2=260.$$

Ответ: 260.

Замечание. Основная сложность этой задачи – это увидеть и доказать, что $KMHN$ – квадрат.

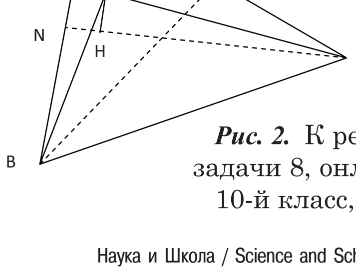

Рис. 2. К решению задачи 8, онлайн-тур, 10-й класс, 2018 г.

В 2019 г. на первом этапе ученику для решения предлагались девять задач на следующие типы:

1. Текстовая задача на движение или работу.
2. Планиметрия (многоугольники).
3. Прогрессия, последовательность.
4. Планиметрия (окружности).
5. Текстовая задача на проценты, доли, части.
6. Задача на функции (или начала математического анализа).
7. Задача на раскраску.
8. Параметр.
9. Логическая.

Некоторые задачи варианта онлайн-тура (10-й класс, 2019 г.)

№ 6.1 (12 баллов). Какое наименьшее значение может принимать функция

$$F(x; y) = x^2 + 8y + y^2 + 14x - 6,$$

при условии, что $x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y)$.

Решение.

$$x^2 + y^2 + 25 = 10(x + y) \Leftrightarrow$$
$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

это окружность с центром (5; 5) и радиусом 5.

Пусть $F(x; y) = M$, тогда

$(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = (M + 71)$ – это окружность с центром (–7; –4) и радиусом $\sqrt{M+71}$.

Так как центр второй окружности лежит вне первой, то условие минимума функции равносильно условию минимума M, при котором окружности пересекутся, а это точка касания двух окружности. То есть сумма радиусов двух окружностей должна равняться расстоянию между их центрами.

$$\left(10+\sqrt{M+71}\right)^2=(5+7)^2+(5+4)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{M+71}=10 \Rightarrow M=29$$

Ответ: 29.

Замечание. Особенность решения этой задачи заключается в том, что здесь используется ее геометрическая интерпретация.

№ 6.2 (12 баллов). Для всех неотрицательных значений вещественной переменной функции $f(x)$ выполняется условие

$$f(x+1)+1=f(x)+\frac{20}{(x+1)(x+2)}.$$

Вычислите $\dfrac{2019}{f(2019)}$, если $f(0) = 2019$.

Решение. Заметим, что

$$f(x + 2019) - f(x) = (f(x + 2019) - f(x + 2018)) + (f(x + 2018) - f(x + 2017)) + \dots + (f(x + 1) - f(x)) =$$
$$= \frac{20}{(x+2019)(x+2020)}-1+\frac{20}{(x+2018)(x+2019)}-1+ +\dots+\frac{20}{(x+1)(x+2)}-1.$$

Таким образом,

$$f(2019)-f(0)=20\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}+\dots+1-\frac{1}{2}\right)-2019=$$
$$=20\left(1-\frac{1}{2020}\right)-2019$$

Следовательно, $\dfrac{2019}{f(2019)}=\dfrac{2020}{20}=101$.

Ответ: 101.

Замечание. При решении этой задачи использовался метод «дробления» разности.

№ 7 (12 баллов). Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35 x 35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы из любой неокрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в любую другую неокрашенную.

Решение. Закрашивать надо в шахматном порядке. Таким образом, будет закрашено $\left[\dfrac{N^2}{2}\right]$ клеток. Так как любой «ход коня» приходится на клетку другого цвета, то на клетку такого же цвета хода нет. «Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу (большую 4 × 4) так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз (рис. 3).

Если пронумеровать эти ходы, то очевидно, что меньше $\left[\dfrac{N^2}{2}\right]$ клеток окрасить

21	16	5	10	23	
6	11	22	17	4	
1	20	15	24	9	26
12	7	18	3	14	
19	2	13	8	25	

Рис. 3. К решению задачи 7, онлайн-тур, 10-й класс, 2019 г.

нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, то есть будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35 x 35 нужно разбить на 49 таблиц 5 x 5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5 x 5.

$$\left\lceil \frac{35^2}{2} \right\rceil.$$

Ответ: 612.

Замечание. Здесь «шахматная» раскраска очевидна, а вот доказательство ее минимальности является сложным фактом.

Чтобы школьник смог оценить сложность заданий второго тура, предлагается к решению следующий вариант 2018 г. Он снабжен ответами ко всем шести задачам, а к некоторым приведены их авторские решения. А также приводятся решения некоторых задач онлайн-тура 2019 г.

Вариант заключительного тура (9-й класс, 2018 г.)

1 (15 баллов). Павел поймал 32 рака и решил их продать на рынке. Когда у него купили часть улова, то оказалось, что покупатель заплатил за каждого на 4,5 рубля меньше, чем за то количество раков, которое осталось лежать на прилавке. При этом мальчик заработал наибольшую сумму денег из всех возможных. Сколько денег заработал Павел? Сколько раков он продал?

Ответ: а) наибольшая сумма денег 189 рублей; б) продал 14 раков.

2 (15 баллов). Найдите промежуток изменения коэффициента подобия треугольников с длинами сторон x, y, z и y, z, p. В ответе укажите ближайшие друг к другу целые числа, между которыми находится найденный промежуток.

Ответ: 0 и 2.

3 (15 баллов). Решите неравенство:

$$\frac{2|2x-1|+2}{3}+\frac{6}{1+|2x-1|}\le 4-\sqrt{16x^4-8x^2+1}.$$

Ответ: –0,5.

4 (15 баллов). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2+(2a-1)x-4a-2\right)\left(x^2+x+a\right)=0$$

имеет три различных корня.

Ответ: –6; –1,5; –0,75; 0; 0,25.

5 (20 баллов). В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбирается точка D так, что $CD : DB = 2 : 1$, а на отрезке AD – точка K, при этом $AK = CD + DK$. Через точку K и вершину B проводится прямая, которая пересекает сторону AC в точке E. Треугольник AEK – равнобедренный ($AE = EK$). Найдите величину угла ADC в градусах.

Ответ: 60°.

6 (20 баллов). Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

Ответ: 0,04.

Решение задачи 5 (2018 г.). Продолжим CB за точку B так, чтобы $BN = BD$. Проведем $NM \parallel BE$. Прямая NM пересекает AD в точ-ке L. Проведем отрезок $CH \perp AD$. Продолжим его до P так, что $HP = HC$ => $PN \parallel AD$.

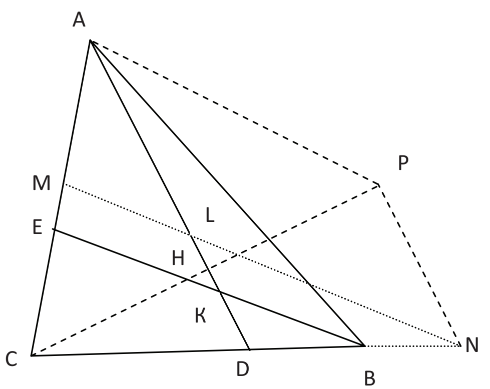

Рис. 4. К решению задачи 5, заключительный тур, 9-й класс, 2018 г.

В треугольнике DLN отрезок BK – средняя линия, следовательно, $DK = KL$, и поэтому $AL = AK - LK = AK - DK = CD$ (рис. 4).

Треугольник CAP – равнобедренный (AH – медиана и высота), поэтому $\angle PAD = \angle DAC$, но $\angle DAC = \angle AKE$ (по условию), $\angle AKE = \angle ALM$ (соответственные), $\angle ALM = \angle NLD$ (вертикальные), $\angle NLD = \angle LNP$ (накрест лежащие), следовательно, $\angle PAD = \angle PNL \Rightarrow LN \parallel AP$, поэтому $ALNP$ – параллелограмм и $CP \perp PN$.

В прямоугольном треугольнике CPN длина $CN = 2CD = 2AL = 2PN$, то есть $\angle PCN = 30°$. Итак, $\angle ADC = 90° - 30° = 60°$.

Ответ: 60°.

Замечание. Сложность решения данной задачи в необходимости дополнительного построения точек N и P.

Вариант заключительного тура (9-й класс, 2019 г.)

1 (10 баллов). Решить неравенство:

$$4\sqrt{(4x-5)^2}+\sqrt[4]{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\le 20-16x.$$

Ответ: 0,25; 1.

2 (15 баллов). Высота равнобедренной трапеции равна $12\sqrt{2}$, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите ее площадь.

Ответ: 288 (кв. ед.)

3 (15 баллов). В гардеробной театра висели 27 пальто и 24 платья. Их решили переместить в другие две комнаты: в первой должно поместиться 25 предметов, а во второй 26. После распределения посчитали процент пальто в каждой комнате и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение пальто по комнатам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ: В одной комнате – 25 пальто, в другой – 2 пальто и 24 платья.

4 (20 баллов). Определите количество решений уравнения

$$(a-1)(x+|x|+1) = |x+4| - 3$$

при каждом значении параметра a.

Ответ: При $a \in (-\infty;-2)$ – решений нет; при $a = -2$ – одно решение; при $a \in (-2;1,5]$ – два решения; при $a \in (1,5;2)$ – три решения; при $a = 2$ – два решения; при $a \in (2;+\infty)$ – одно решение.

5 (20 баллов). В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) со стороной $BC = a$ биссектриса $\angle A$ пересекает серединный перпендикуляр к отрезку BC в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AML, если угол $\angle CBL = \alpha$, M – середина стороны AB.

Ответ: $\dfrac{a(\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{4\sin\alpha}$.

6 (20 баллов). Является ли число 3276800081 простым? Дать обоснованный ответ (без использования калькулятора).

Решение задачи 6 (2019 г.).

Первый способ. Так как $80^5 = 3276800000$, то $3276800081 = 80^5 + 80 + 1$.

Воспользуемся формулой:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Следовательно,

$$3276800081 = 505601 \cdot 6481.$$

Второй способ.

$$3276800081 \cdot 625 = 2048000050625 = 2^{11} \cdot 10^9 + 50625 = 2^{15} \cdot 10^5 \cdot 5^4 + 50625 = 5^4(80^5 + 80 + 1) = 5^4(80^3 + 80^2 + 1) \times (80^2 + 80 + 1) = 505601 \cdot 6481 \cdot 625.$$

Ответ: Нет.

Замечание. Сложность этой задачи в том, что числа 505601 и 6481 – простые и их трудно подобрать, а решение сводится к использованию соответствующей формулы.

Таким образом, поиск решения олимпиадной математической задачи требует от школьника осознать условие задачи и использовать нестандартные подходы к ее решению, такие как дополнительное построение в геометрии или выбор типа раскраски в логической задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». URL: https://olymp.bmstu.ru/ru/mathematics-olymp (дата обращения: 03.08.2020).

REFERENCES

1. “Step into the Future” olympics. *Available at:* https://olymp.bmstu.ru/ru/mathematics-olymp (accessed: 03.08.2020).

Плетнев Андрей Леонидович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры ФН1 «Высшая математика», Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

e-mail: alpxy@rambler.ru

Pletnev Andrey L., PhD in Engineering, Associate Professor, Fundamental Sciences “Higher Mathematics” Department, Bauman Moscow State Technical University

e-mail: alpxy@rambler.ru

Плетнева Лариса Александровна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика», Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

e-mail: pletnevala@gmail.com

Pletneva Larisa A., PhD in Engineering, Associate Professor, Applied Mathematics Department, Moscow Automobiles and Road Construction State Technical University (MADI)

e-mail: pletnevala@gmail.com

Статья поступила в редакцию 03.08.2020
The article was received on 03.08.2020