УДК 372.851
ББК 22.141
DOI: 10.31862/1819-463X-2020-2-165-175

КОРРЕКТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Н. Н. Яремко, М. В. Глебова

Аннотация. *В статье рассматривается вопрос о корректности определения понятий корня n-й степени из действительного числа и степени действительного числа с произвольным действительным показателем. Мы проанализируем определения этих понятий в ряде различных школьных учебников и вузовских пособий, обсудим возникающие отличия и противоречия; приведем решения показательных и степенно-показательных уравнений в зависимости от тех подходов, которые были выбраны авторами. Решение проблемы корректного определения указанных понятий лежит за пределами школьного курса математики и уходит в теорию аналитических функций, но, тем не менее, мы предложим пути, которые, на наш взгляд, возможно реализовать при обучении математике* в общем образовании.

Ключевые слова: *корень n-й степени из действительного числа, степень действительного числа с действительным показателем, показательные и степенно-показательные уравнения.*

CORRECTNESS OF DETERMINING THE DEGREE OF A REAL NUMBER WITH A RATIONAL EXPONENT

N. N. Yaremko, M. V. Glebova

Abstract. *The article considers correctness of definition for the root of the n-th degree from a real number and the degree of a real number with an arbitrary real exponent. The article analyzes the definitions of these concepts in different school textbooks and university textbooks, and discusses the differences and contradictions that arise. The article solves exponential and power-exponential equations depending on those approaches that were chosen by the authors. The solution to the problem of correctly defining these concepts lies outside the school mathematics course and goes into the theory of analytic functions. The authors of the article suggest ways that, in their opinion, can be implemented when teaching mathematics.*

© Яремко Н. Н., Глебова М. В., 2020

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Keywords: *root of the n-th degree for a real number, the degree of a real number with a real exponent, exponential and power-exponential equations.*

Введение

Математические понятия корня n-й степени из действительного числа и степени действительного числа с произвольным показателем достаточно тесно связаны между собой. При решении показательных и степенно-показательных уравнений необходимо оперировать ими обоими, грамотно переходить от одного к другому, опираясь на определения из различных источников: школьных учебников, пособий и руководств по решению задач. Равносильность определений и вопрос о посторонних решениях особенно важен при тестовой системе контроля, когда проверке подлежит лишь ответ задачи, а сам процесс решения или пояснения при этом не рассматриваются. Возникающие разночтения при определении указанных понятий и решение показательных, степенно-показательных уравнений мы хотели бы обсудить в статье.

Статья имеет четыре раздела. В разделах 1–3 обсуждаются определения степени действительного числа с целым показателем, корня n-й степени из действительного числа, степени действительного числа с произвольным действительным показателем; в разделе 4 рассмотрены решения степенно-показательных уравнений. В конце статьи – заключение.

Определения, которые мы обсудим, являются генетическими. Они формулируются указанием ближайшего рода и видового отличия; видовое отличие дает способ получения определяемого понятия. Например: корень n-й степени из действительного числа a, $a > 0$ – это число (число – родовое понятие), n-я степень которого равна a (n-я степень которого равна a – это видовое отличие, в котором описан способ получения корня, то есть определяемого понятия). Такова же структура двух других определений.

Для генетических определений существуют формально-логические требования корректности [1]:

1) определение должно быть соразмерным;

2) определение не должно содержать порочного круга;

3) целесообразно определять объект через ближайший род;

4) определение должно быть четким и ясным, раскрывающим определенный набор свойств понятия.

В теории и методике обучения математике эти требования также называются правилами правильного определения понятий. При выполнении формально-логических требований корректности объем определяемого понятия определен однозначно. С точки зрения формальной логики понятия, введенные с помощью различных определений, называются эквивалентными или синонимичными, если их объемы совпадают [2]. Таким образом, определение корректно, если выполнены формально-логические требования корректности, и, кроме того, если определения различны, они должны быть эквивалентными, то есть объемы определяемых понятий в обязательном порядке должны совпадать [3].

Проанализируем определения понятий степени действительного числа с произвольным показателем, корня n-й степени из действительного числа с точки зрения требования корректности.

1. Степень действительного числа с целым показателем

Степень a^n в различных учебниках определена стандартно. Дополнительным соглашением вводится нулевая и первая степени, то есть отдельно определено a^n для $n = 1$ и $n = 0$; также дополнительным соглашением определяются натуральные степени числа 0.

Определение. «Под a^n, где $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, понимают произведение n одинаковых множителей, каждым из которых является число a. Выражение a^n называют степенью, число a – основанием степени, число n – показателем степени» [4, с. 82]. «Степенью числа a с показателем 1 называют само это число: $a^1 = a$» [4, с. 83]. «Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$» [4, с. 96].

Подобное определение в учебнике [5]: «Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называют выражение a^1, равное a» [5, с. 39]. «Степенью числа a, где $a \neq 0$, с нулевым показателем называется выражение a^0, равное 1. Выражение 0^0 не имеет смысла» [5, с. 45]. Аналогичные определения сформулированы и в учебниках [6, с. 15; 7, с. 14; 8, с. 7].

Возведение действительного числа a ($a \neq 0$) в целую степень n, когда n – целое отрицательное число, в учебнике [9, с. 215] определяется формулой: $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, а «выражению 0^n при целом отрицательном n и при $n = 0$ не приписывают никакого значения; говорят, что это выражение не имеет смысла» [9, с. 215]. В учебниках [10 с. 105; 11, с. 52; 12, с. 45] формула записана в другом виде: «для любого числа $a \neq 0$ и целого отрицательного числа n определим: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$», [10, с. 105].

Мы считаем, что принятый в учебниках подход для определения степени a^n при $n = 1$ и $n = 0$, а также степени числа $a = 0$ с методической точки зрения вполне оправдан. Таким образом, нет разночтений в определении степени действительного числа с целым показателем, в различных учебниках понятие определено корректно.

2. Корень *n*-й степени из числа *a*, то есть $\sqrt[n]{a}$

Это понятие вначале вводится для положительного числа a, $a > 0$, и натурального n; затем для отрицательного a, $a < 0$ при нечетном n. Далее определяются арифметический корень из неотрицательного и отрицательного чисел. Анализ школьных учебников выявляет ряд разночтений. Во-первых, оказывается, что случай $n = 1$ трактуется по-разному. Далее это приводит к разночтениям, во-вторых, как вводить степень $a^{\frac{m}{n}}$ для $n = 1$?

Однозначная и последовательная позиция выдержана только в некоторых учебниках, например, в учебниках [4; 13] авторского коллектива профессора А. Г. Мордковича: $\sqrt[n]{a}$ при $n = 1$ не определен. При введении понятия $a^{\frac{m}{n}}$ очень внятно и последовательно эта точка зрения утверждается: сделано ограничение, что $n \neq 1$; затем при решении показательных и степенно-показательных уравнений авторы указывают в качестве посторонних те корни, при которых показатель степени корня обращается в 1 (см. примеры ниже). Обратимся подробнее к учебникам. В учебнике [13, с. 36–37] отдельно определяется корень n-й степени из неотрицательного числа, с уточнением: $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, и корень нечетной степени из отрицательного числа для $n = 3, 5, 7, \ldots$.

Определение. «Корнем n-й степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) называют такое неотрицательное число, при возведении в степень n которого получается число a. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$» [13, с. 36].

Определение. «Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a ($n = 3, 5, \ldots$) называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$» [13, с. 38].

Аналогично в учебниках [14, с. 100; 15, с. 232] при определении корня степени n из числа b четко оговорено, что «n – натуральное, большее или равное 2», и такое же ограничение на n дается при определении арифметического корня степени n из неотрицательного числа [14, с. 106; 15, с. 232]. В этих учебниках однозначно определено, что n не может быть равным 1.

В учебниках других авторов предложен иной подход. Так, в [16, с. 121; 17, с. 207] корнем n-й степени из числа a (n – произвольное либо любое натуральное число) «называется такое число, n-я степень которого равна a», и «арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a» [16, с. 122; 17, с. 207]. Также в учебнике [18, с. 201] определение арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа рассматривается для n, где n – натуральное число. Получается, что n может быть равным 1, поскольку 1 – натуральное?

В учебниках [19, с. 18; 20, с. 148] в самом определении арифметического корня натуральной степени сказано, что $n \geq 2$. Значит, n не может быть равным 1 при рассмотрении корня из положительного числа. Далее в этих же учебниках определяется корень нечетной степени из отрицательного числа $\sqrt[2k+1]{a}$ «для любого нечетного натурального $2k+1$» [19, с. 19; 20, с. 149]. Однозначной позиции не просматривается, может ли n быть равным 1 или нет. Аналогично в учебнике [21]: в предисловии к главе 2 говорится, что «затем от квадратных корней перейдем к корням натуральной степени n ($n \neq 1$)» [21, с. 46], хотя тексте при определении корня n-й степени это условие не оговорено [21, с. 52].

В учебнике Л. Г. Петерсон, с одной стороны, корень n-й степени $\sqrt[n]{a}$ на с. 4 определяется для «$n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ – четное натуральное…» [12, с. 4] и дается определение арифметического корня, а далее, когда $n = 3, 5, 7, 9, \ldots$, дается определение корня n-й степени из действительного числа. С другой же стороны, на с. 51 имеется фраза: «ясно, что $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m, m \in Z$» [12, с. 51], то есть $n = 1$ допускается.

Таким образом, можно констатировать, что среди авторов школьных учебников нет единой точки зрения по этому вопросу. На наш взгляд, есть два варианта прийти к общему мнению. Разделить точку зрения профессора А. И. Маркушевича [22, с. 127] и профессора А. Г. Мордковича, исключающих $n = 1$ при определении корня $\sqrt[n]{a}$. Но можно предложить и не противоречащий теории аналитических функций другой вариант – определить $\sqrt[n]{a}$ при $n = 1$ дополнительным отдельным соглашением: $\sqrt[1]{a} = a$. Целесообразность такого дополнительного соглашения основана на том, что извлечение корня первой степени обратно к операции возведения в первую степень, что во всех учебниках принято дополнительным соглашением.

3. Степень числа с рациональным (дробным) показателем

В учебниках старших классов (в 10-м или 11-м) вводится понятие степени $a^{\frac{m}{n}}$ положительного $a > 0$, а в некоторых учебниках неотрицательного $a \geq 0$, числа a с рациональным (дробным) показателем. Определений для степеней отрицательного числа a, $a < 0$, в школьных учебниках мы не встретили. Хотя в дальнейшем, например, при решении показательных и степенно-показательных уравнений степень с отрицательным основанием a, $a < 0$, и дробным показателем возникает. Различия в определениях касаются множеств допустимых значений, которые принимают числа m, n. Будут ли они целыми или только натуральными, должны ли эти числа быть взаимно простыми или дробь $\frac{m}{n}$ – обыкновенная и поэтому ее можно сокращать, допустимо ли значение $n = 1$? Ответы на эти вопросы в школьных учебниках существенно различаются.

Определение. «Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь (p>0, q>0, $q \neq 1$) и $a \geq 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$, т. е. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ » [13, с. 55].

Определение. «Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$» [13, с. 55].

Много внимания уделено введению понятия степени положительного числа *а* с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ в учебниках авторов М. Я. Пратусевич [15], А. Н. Колмогорова [17], Г. К. Муравина [21]. Сначала в этих учебниках формулируют определение степени с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geq 2$ и $a > 0$ как $\sqrt[n]{a^m}$. Отдельным предложением в определении говорится, что степень числа 0 определена только для положительного показателя: $0^r = 0$, где r – положительное рациональное число [15, с. 242]. Подобный подход – в учебниках А. Н. Колмогорова [17, с. 218], Г. К. Муравина [21, с. 67]. Далее в учебнике М. Я. Пратусевич сформулирована «теорема о корректности определения…» и доказывается, что $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$, где $k \in N$ [15, с. 243]. У А. Н. Колмогорова это доказывается в замечании 2 [17, с. 219]. В этом же параграфе в учебнике А. Н. Колмогорова в замечании 3 [17, с. 219], а у М. Я. Пратусевич [15, с. 244] отмечается, что рациональная степень отрицательного числа не определена, нельзя отрицательные числа возводить в рациональную степень.

В некоторых учебниках не дается определение, а на основании свойств степени и арифметического корня обосновывается равенство «$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geq 2$ и $a > 0$» [19, с. 24; 20, с. 156].

А что с $n = 1$? На этот вопрос либо нет ответа, либо он подразумевается, что при $n = 1$ получается a в целой степени. Четко оговорен случай $n = 1$ не у всех авторов. Так, в учебнике автора М. Я. Пратусевич сначала сразу после определения отмечено, что «при $n = 1$ выражение $a^{\frac{m}{n}}$ есть степень с целым показателем, определенная в курсе основной школы» [15, с. 243], а позже говорится о том, что «в отдельном рассмотрении нуждается случай $n = 1$ (поскольку не определен корень первой степени). Для этого случая утверждение корректности выглядит так: Пусть $a > 0$, $m \in Z, k \in N$, тогда $a^m = a^{\frac{mk}{k}}$» [15, с. 243].

Вопрос относительно $n = 1$ отдельно не рассматривается в учебниках [12] и [18]: в учебнике В. В. Козлова [18], как и для корня n-й степени при определении степени с рациональным показателем, указано, что «n – натуральное число» [18, с. 202], без каких-либо уточнений; в учебнике Л. Г. Петерсон [12, с. 51] в определении степени с рациональным показателем имеется запись «$n \in N$» и даже уточняется, что

$$a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m, m \in Z\text{» [12, с. 51].}$$

Имеются неточности: в учебнике Ю. М. Колягина: $n \in N$, а ниже «формула справедлива для любого целого числа m и любого натурального $n \geq 2$» [20, с. 156]. Обратим внимание, что если раньше у А. Н. Колмогорова при определении корня n-й степени n могло принимать значение 1 [17, с. 207], то в определении степени с дробным показателем сказано, что $n > 1$ [17, с. 218].

Для того чтобы определить показательную функцию, далее в учебниках рассматривается степень положительного числа с иррациональным показателем, при этом одни авторы используют понятие предела последовательности, а другие иллюстрируют вводимое понятие на примерах, дают лишь описание. В итоге в той или иной форме делается вывод, что степень «a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x. Если $a = 0$, то 0^x определено только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$» [20, с. 159]. В учебнике М. Я. Пратусевич четко сказано, что «если $a < 0$, то $a^{\frac{m}{n}}$ не определено, а степень 0^r определена при $r > 0$» [15, с. 244]. Наиболее подробно об этом сказано в учебнике А. Г. Мордковича [13] при введении показательной функции: «Второе важное замечание. Обычно не рассматривают показательную функцию с основанием $a = 1$ или с основанием a, удовлетворяющим неравенству $a \leq 0$, показательная функция $y = a^x$ при

$a = 1$ «вырождается» в постоянную функцию $y = 1$ – это неинтересно. Если $a = 0$, то $0^x = 0$ для любого положительного значения x, т. е. мы получаем функцию $y = 0$, определенную при $x > 0$, – это тоже неинтересно. Если, наконец, $a < 0$, то выражение a^x имеет смысл лишь при целых значениях x, а мы все-таки предпочитаем рассматривать функции, определенные на сплошных промежутках» [13, с. 98].

Подводя итог нашему краткому обзору, мы склоняемся к тому, что можно поддержать точку зрения, высказанную в учебнике авторского коллектива А. И. Маркушевича [22, с. 140]: степень $a^{\frac{m}{n}}$, $a > 0$, определяется для целого m, натурального n и несократимой дроби $\frac{m}{n}$; случай $n = 1$ ввести дополнительным соглашением:

$$a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m.$$

4. Показательные и степенно-показательные уравнения

Различия, которые мы выявили в учебниках при определении степени a^α числа a с произвольным показателем α, существенно влияют на множество решений степенных и степенно-показательных уравнений. Приведем примеры.

Рассмотрим варианты решения уравнения из учебника Ш. А. Алимова и др., упражнение № 226 (4) [19, с. 79]:

$$\sqrt[x]{5}\; 5^x = 25. \qquad (1)$$

Если ориентироваться на учебники [13–15; 19; 20], то уравнение (1) *не имеет решений*, так как x*-натуральное* должно быть больше либо равным 2 по определению корня n-й степени из числа a. В то же время в соответствии с учебниками [16–18] $x = 1$ *является корнем* уравнения (1). В учебниках [12; 21] нет однозначной аргументации относительно того, будет ли решением $x = 1$.

Аналогичная ситуация возникнет, если школьник решает уравнение

$$6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0 \text{ [23].} \qquad (2)$$

Обе части уравнения делим на $\sqrt[x]{6}$, вводим замену, $t = \sqrt[x]{\frac{3}{2}}$, решаем рациональное уравнение относительно t. Получаем: $t = \frac{3}{2}$ и $t = \frac{2}{3}$. Следовательно, $x = 1$, $x = -1$. А дальше – в зависимости от учебника. Если ориентироваться на учебники [13–15; 19; 20; 23], то уравнение (2) *не имеет решений*. Ели опираться на [16–18], то 1 *является корнем* уравнения (2). В соответствии с [12; 21] нельзя дать однозначный ответ.

В учебниках [19; 20] имеется учебный материал на отработку этого материала. Так, например: «Задача 9. Решить уравнение $\sqrt[x]{3}\sqrt[x]{5} = 225$» [19, с. 79; 20, с. 227]. Находят $x = 0{,}5$ и замечают, что x должно быть больше 1 и натуральным, поэтому уравнение не имеет корней. Подобное встречаем в [13]: «Пример 5. Решить уравнение $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$». В решении этого уравнения сразу замечают: «поскольку x – показатель корня, x может принимать только натуральные значения, начиная с числа 2» [13, с. 105].

Далее происходит расширение понятия степени действительного числа при решении степенно-показательных уравнений [20, с. 227, с. 229]:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}. \qquad (3)$$

Для примера:

$(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1$ рассмотрены три случая:

1) $x - 3 = 1$;

2) $\begin{cases} x - 3 = -1, \\ 3x^2 - 10x + 3 = 2n, n \in Z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 30 \neq 0, \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0. \end{cases}$

Далее в упражнениях с заданием решить уравнение имеется № 699 [20, с. 229]:

«1) $(x-3)^{x^2-x-2} = 1$ (ответ: –1, 2,4),

3) $(x+3)^{x^2-4}=(x+3)^{2x}$ (ответ: –4, –3, –2, 1)».

Поскольку теории нет, а решен лишь пример, то просматривается ориентир на то, что степень a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x; если же $a = 0$, то 0^x определено только при $x > 0$; если $a < 0$, то выражение a^x имеет смысл лишь при целых значениях x.

Аналогичный подход в учебнике В. Н. Литвиненко: «если условием не исключается возможность $a(x) \leq 0, a(x) = 1$, приходится рассматривать несколько случаев, как это сделано в следующем примере» [23, с. 121], рассмотрено пять случаев:

1) $a(x) = 1$;

2) $\begin{cases} a(x) = -1, \\ f(x) \in Z, \\ g(x) \in Z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} a(x) = 0, \\ f(x) \neq 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} a(x) < 0, \\ a(x) \neq -1, \\ f(x) \in Z, g(x) \in Z. \end{cases}$

В своем пособии С. И. Колесникова указывает: «В школьных учебниках нет ни единого слова о свойствах такой функции (имеется в виду $y = a(x)^{f(x)}$). Алгоритма нахождения корней, при которых $a(x) < 0$, в подобных примерах не существует. Искать такие корни не надо. В некоторых регионах заставляют обязательно подставлять $a(x) = 0$, а что касается отрицательных $a(x)$, то в некоторых наказывают за их отсутствие, в других, наоборот, за присутствие» [24, с. 89].

Этот же вопрос рассмотрен в учебнике 2010 г. [15], в нем говорится, что «возникает вопрос об области определения функции вида $f(x)^{g(x)}$. Мы будем считать, что если $g(x)$ не является целочисленной константой, то это выражение определено лишь при $f(x) > 0$. Если $g(x)$ является натуральным, то $f(x)$ может принимать любые значения. Если $g(x)$ – целое неположительное число, то $f(x)$ не может принимать значение 0. Это соглашение, несмотря на его кажущуюся громоздкость, весьма логично, так как уравнение – это предикат вида $f(x) = 0$ и прежде, чем решать его, мы должны понимать, среди каких чисел будем искать решение. Ясно, что если левая часть представляет собой выражение вида $a(x)^{b(x)}$, то «вылавливать» те значения x, при которых $a(x)$ отрицательно, но целое, в общем случае тяжело и громоздко. Проще считать, что данное выражение определено лишь при $a(x) > 0$» [15, с. 247–248].

В пособии [24, с. 10–11] предлагается по определению считать, что при $c > 0$, $c \neq 1, a(x) > 0$ $a(x)^{b(x)} = c^{b(x)\log_c a(x)}$, и в уравнениях вида (3) записывать в ОДЗ $a(x) > 0$, тогда

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x) = 1, \\ \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

И с этих позиций уравнение $x^{x^2} = x^{-2-3x}$ имеет корнем 1, а числа -1 и -2 не являются корнями этого уравнения.

Очень часто авторы учебников и учебных пособий решения степенно-показательных уравнений и неравенств либо избегают, либо дают не вполне внятные рекомендации, либо даже противоречат себе, а среди авторитетных авторов нет единой точки зрения. Как в этом случае быть ученику? Если уравнение или неравенство такого типа требуется решить не на классной контрольной работе, а, например, на олимпиаде или итоговом испытании, когда представлен весь спектр учебников? Что считать правильным ответом? По нашему мнению, ученик должен обосновать свое решение в рамках той точки зрения, которая принята в его учебнике. Или привести все существующие подходы и соответствующие решения, показав свою эрудицию.

К счастью, такие задачи в последнее время не встречаются на олимпиадах или на итоговых экзаменах. По вполне понятным причинам составители КИМов их избегают.

Заключение

Понятие «корректность» в качестве критерия позволяет оценить определение понятий, такая оценка играет важную роль как в познании, построении понятийного аппарата, так и в процессе обучения при введении новых понятий, их определении, применении и обобщении.

Как мы видим, при определении понятий корня n-й степени из действительного числа и степени действительного числа с произвольным показателем имеются разночтения, противоречия, которые говорят в целом об отсутствии корректности в этих вопросах. В дальнейшем различные подходы при введении названных понятий проявляются при решении показательных и степенно-показательных уравнений. Чтобы избежать спорных ситуаций, можно не включать такие задачи в ЕГЭ и олимпиады. Конечно, более целесообразно было бы принять единую точку зрения. Пока же этого не сделано, считать, что числовые равенства

$$(-2)^3 = (-2)^{\frac{12}{4}}, (-8)^{\frac{10}{6}} = (-8)^{\frac{5}{3}}$$

неверны, так как выражения

$$(-2)^{\frac{12}{4}}, (-8)^{\frac{10}{6}}$$

не существуют и степени $a^{\frac{m}{n}}$ при $a < 0$ определены лишь для несократимой дроби $\frac{m}{n}$.

Будем рады узнать точку зрения читателей по данной проблеме и обсудить предложенные вопросы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 2009. 732 с.
2. *Демидов И. В.* Логика: учеб. пособие для юридических вузов / под ред. Б. И. Каверина. М.: Юриспруденция, 2000. 208 с.
3. *Селютин В. Д., Яремко Н. Н.* Обучение бакалавров математике на основе понятия «корректность»: моногр. Орел: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2019. 184 с.
4. *Мордкович А. Г.* Алгебра 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 17-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.
5. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. 8-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2008. 335 с.
6. *Рубин А. Г., Чулков П. В.* Алгебра. 7 кл.: учебник для организаций, осуществляющих образоват. деятельность. М.: Баласс, 2015. 224 с.
7. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, С. В. Суворова, Е. А. Бунимович [и др.]. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 287 с.
8. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. 4-е изд. М.: Просвещение, 2017. 287 с.
9. Алгебра 8 класс: учебник для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013. 287 с.
10. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, С. В. Суворова, Е. А. Бунимович [и др.]. 5-е изд. М.: Просвещение, 2018. 320 с.
11. *Рубин А. Г., Чулков П. В.* Алгебра 8 кл.: учебник для организаций, осуществляющих образоват. деятельность. М.: Баласс, 2015. 240 с.
12. Алгебра: 9 класс: в 2 ч. Ч. 2 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович [и др.]. М.: Ювента, 2017. 200 с.

13. *Мордкович А. Г., Семенов П. В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни). 2-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 311 с.
14. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников [и др.]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 430 с.
15. *Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н.* Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: профильный уровень. М.: Просвещение, 2009. 415 с.
16. Алгебра: учебник для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. 14-е изд. М.: Просвещение, 2007. 271 с.
17. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.]. 19-е изд. М.: Просвещение, 2010. 384 с.
18. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 10 класса общеобразоват. организаций. Базовый и углубленный уровни / В. В. Козлов, А. А. Никитин, В. С. Белоносов [и др.]; под ред. В. В. Козлова, А. А. Никитина. 3-е изд. М.: Русское слово – учебник, 2017. 464 с.
19. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др.]. 3-е изд. М.: Просвещение, 2016. 463 с.
20. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова [и др.]. 5-е изд. М.: Просвещение, 2018. 384 с.
21. *Муравин Г. К., Муравина О. В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник. М.: Дрофа, 2013. 318 с.
22. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. 704 с.
23. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ABF, 1995. 352 с.
24. *Колесникова С. И.* Математика. Интенсивный курс подготовки к Единому государственному экзамену. 6-е изд. М.: Айрис-пресс, 2008. 304 с.

REFERENCES

1. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obshchaya metodika: ucheb. posobie. Cheboksary: Izd-vo Chuvashsk. un-ta, 2009. 732 p.
2. Demidov I. V. *Logika: ucheb. posobie dlya yuridicheskikh vuzov.* Moscow: Yurisprudentsiya, 2000. 208 p.
3. Selyutin V. D., Yaremko N. N. *Obuchenie bakalavrov matematike na osnove ponyatiya "korrektnost": monogr.* Orel: OGU im. I. S. Turgeneva, 2019. 184 p.
4. Mordkovich A. G. *Algebra 7 klass. Part. 1. Uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatelnykh uchrezhdeniy.* Moscow: Mnemozina, 2013. 175 p.
5. Makarychev Yu. N., Mindyuk N. G., Neshkov K. I., Feoktistov I. E. *Algebra. 7 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy*. Moscow: Mnemozina, 2008. 335 p.

6. Rubin A. G., Chulkov P. V. *Algebra. 7 kl.: uchebnik dlya organizatsiy, osushchestvlyayushchikh obrazovat. deyatelnost.* Moscow: Balass, 2015. 224 p.
7. Dorofeev G. V., Suvorova S. V., Bunimovich E. A. et al. *Algebra. 7 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy*. Moscow: Prosveshchenie, 2014. 287 p.
8. Nikolskiy S. M., Potapov M. K., Reshetnikov N. N., Shevkin A. V. *Algebra. 7 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy*. Moscow: Prosveshchenie, 2017. 287 p.
9. Makarychev Yu. N., Mindyuk N. G., Neshkov K. I., Suvorova S. B. *Algebra 8 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy s pril. na elektron. nositele.* Moscow: Prosveshchenie, 2013. 287 p.
10. Dorofeev G. V., Suvorova S. V., Bunimovich E. A. et al. *Algebra. 8 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy*. Moscow: Prosveshchenie, 2018. 320 p.
11. Rubin A. G., Chulkov P. V. *Algebra 8 kl.: uchebnik dlya organizatsiy, osushchestvlyayushchikh obrazovat. deyatelnost.* Moscow: Balass, 2015. 240 p.
12. Peterson L. G., Agakhanov N. Kh., Petrovich A. Yu. et al. *Algebra: 9 klass. Part 2.* Moscow: Yuventa, 2017. 200 p.
13. Mordkovich A. G., Semenov P. V. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass. Part 1: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy (bazovyy i uglublennyy urovni).* Moscow: Mnemozina, 2014. 311 p.
14. Nikolskiy S. M., Potapov M. K., Reshetnikov N. N. et al. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy: bazovyy i profil. urovni*. Moscow: Prosveshchenie, 2009. 430 p.
15. Pratusevich M. Ya., Stolbov K. M., Golovin A. N. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: profilnyy uroven.* Moscow: Prosveshchenie, 2009. 415 p.
16. Makarychev Yu. N., Mindyuk N. G., Neshkov K. I., Suvorova S. B. *Algebra: uchebnik dlya 9 kl. obshcheobrazovat. uchrezhdeniy.* Moscow: Prosveshchenie, 2007. 271 p.
17. Kolmogorov A. N., Abramov A. M., Dudnitsyn Yu. P. et al. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy*. Moscow: Prosveshchenie, 2010. 384 p.
18. Kozlov V. V., Nikitin A. A., Belonosov V. S. et al. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya: uchebnik dlya 10 klassa obshcheobrazovat. organizatsiy. Bazovyy i uglublennyy urovni.* Moscow: Russkoe slovo – uchebnik, 2017. 464 p.
19. Alimov Sh. A., Kolyagin Yu. M., Tkacheva M. V. et al. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy: bazovyy i uglublennyy urovni*. Moscow: Prosveshchenie, 2016. 463 p.
20. Kolyagin Yu. M., Tkacheva M. V., Fedorova N. E. et al. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy: bazovyy i uglublennyy urovni.* Moscow: Prosveshchenie, 2018. 384 p.
21. Muravin G. K., Muravina O. V. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. Uglublennyy uroven. 10 klass.: uchebnik.* Moscow: Drofa, 2013. 318 p.
22. Markushevich A. I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy.* Moscow – Leningrad: GITTL, 1950. 704 p.
23. Litvinenko V. N., Mordkovich A. G. *Praktikum po elementarnoy matematike: Algebra. Trigonometriya: ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. spets. ped. in-tov.* Moscow: ABF, 1995. 352 p.

24. Kolesnikova S. I. *Matematika. Intensivnyy kurs podgotovki k Edinomu gosudarstvennomu ekzamenu.* Moscow: Ayris-press, 2008. 304 p.

Яремко Наталия Николаевна, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры «Математическое образование» Педагогического института им. В. Г. Белинского Пензенского государственного университета

e-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko Natalia N., ScD in Education, Associate Professor, Professor, Mathematical Education Department, V. G. Belinsky Pedagogical Institute, Penza State University

e-mail: yaremki@yandex.ru

Глебова Мария Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математическое образование» Педагогического института им. В. Г. Белинского Пензенского государственного университета

e-mail: mvmorgun@mail.ru

Glebova Maria V., PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Mathematical Education Department, V. G. Belinsky Pedagogical Institute, Penza State University

e-mail: mvmorgun@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.12.2019
The article was received on 01.12.2019