УДК 373.5+378.1
ББК 74.26+74.48

DOI: 10.31862/1819-463X-2023-6-160-172

О МЕСТЕ КОМБИНАТОРИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ

А. Н. Ветохин, Е. И. Деза, Д. Л. Модель

Аннотация. *В статье рассмотрен ряд практических проблем, возникающих при обучении школьников в рамках стохастической содержательной линии. На основе анализа нормативных документов выявлено место комбинаторики в современной школьной математике. Проанализировано с точки зрения рассматриваемой проблемы содержательное наполнение учебников и банка заданий по теории вероятностей, предлагаемых для подготовки обучающихся к итоговой аттестации. Выделены проблемы, с которыми сталкиваются школьники в ходе решения теоретико-вероятностных задач, и намечены возможные пути их решения при использовании комбинаторного подхода. Сформулированы вопросы, отражающие суть обсуждаемых проблем: какие комбинаторные конфигурации и формулы нужны школьникам (чему учить); какие учебники следует использовать при обучении школьников комбинаторике (на базе чего учить); как готовить учителя к обучению школьников комбинаторике (кому учить)? Предложены подходы, обеспечивающие частичное решение выделенных проблем.*

Ключевые слова: *комбинаторика, теория вероятностей, школьные вероятностные и комбинаторные задачи, методика преподавания теории вероятностей и комбинаторики, учебник по теории вероятностей и комбинаторике.*

Для цитирования: *Ветохин А. Н., Деза Е. И., Модель Д. Л.* О месте комбинаторики в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 6. С. 160–172. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-6-160-172.

© Ветохин А. Н., Деза Е. И., Модель Д. Л., 2023

Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License
The content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ON THE PLACE OF COMBINATORICS IN THE MATHEMATICAL TRAINING OF SCHOOLCHILDREN

A. N. Vetokhin, E. I. Deza, D. L. Model

Abstract. *In the article a number of practical problems that arise when teaching schoolchildren within the framework of the stochastic content line are considered. Based on the analysis of regulatory documents, the place of combinatorics in modern school mathematics was revealed. The content of textbooks and a bank of tasks on probability theory proposed to prepare schoolchildren for final certification was analyzed from the point of view of the problem under consideration. The problems faced by schoolchildren in the course of solving probabilistic problems are highlighted, and possible ways to solve them when using the combinatorial approach are outlined. Questions are formulated that reflect the essence of the problems discussed: what combinatorial configurations and formulas schoolchildren need (what to teach); which textbooks should be used in teaching combinatorics to schoolchildren (on the basis of what to teach); how to prepare a teacher to teach combinatorics to schoolchildren (who should teach)? Approaches are proposed that provide a partial solution to the identified problems.*

Keywords: *combinatorics, probability theory, school probabilistic and combinatorial problems, methodology of teaching of probability theory and combinatorics, textbook on probability theory and combinatorics.*

Cite as: Vetokhin A. N., Deza E. I., Model D. L. On the place of combinatorics in the mathematical training of schoolchildren. *Nauka i shkola.* 2023, No. 6, pp. 160–172. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-6-160-172.

Введение

Внедрение элементов стохастической содержательной линии в школьный курс математики набирает темпы. Несмотря на существенные достижения (нормативные, содержательные, организационные и др.) последнего времени в этой области, число вопросов, связанных с изучением теории вероятностей в школе, не уменьшается. Интересует данная проблематика и авторов статьи. В предыдущих публикациях на эту тему [1; 2] мы пытались ответить на вопросы, связанные с теорией вероятностей. В данной работе мы попробуем ответить на вопрос: «Нужна ли при обучении теории вероятностей комбинаторика?». В такой формулировке вопрос становится почти риторическим. Конечно, нужна, а как же иначе? Однако основания для дискуссии остаются. Тем не менее, расширим предмет обсуждения: «Каково место комбинаторики в школьной теории вероятностей, в частности, и в современной школьной математике, в целом?». Рассматривая комбинаторику как важную составную часть дискретной математики, мы не можем и не должны сводить ее роль в школьной математике лишь к поддержке теоретико-вероятностной линии. Тем более что, используемая только в этом качестве, комбинаторика неизбежно теряет ряд своих основополагающих характеристик. Впрочем, даже оставив комбинаторике лишь роль «помощницы» теории вероятностей, можно отнестись к ней с должным уважением и использовать ее возможности более эффективно. Мы обозначим ряд наиболее значимых аспектов этой проблемы в соответствующих разделах статьи.

Однако начать изложение следует с анализа современного состояния проблематики, рассмотрев основные нормативные документы, принятые в последние годы.

Анализ федеральных государственных образовательных стандартов и примерных рабочих программ по математике

В федеральных государственных образовательных стандартах основного общего образования (ФГОС ООО, 2021 г. [3]) и среднего общего образования (ФГОС СОО, с изменениями 2022 г. в ФГОС СОО 2012 г. [4]) четко обозначено следующее: предмет «Математика» предметной области «Математика и информатика» содержит, в 7–9-х классах, учебные курсы «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика»; в 10–11-х классах – курсы «Алгебра и начала анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика». При этом каждый курс предлагается как на базовом, так и на углубленном уровне.

В ФГОС ООО среди требований к предметным результатам для 9-го класса, базовый уровень, представлены такие: «умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения» [3]. Для 9-го класса, углубленный уровень: «умение свободно оперировать понятиями перестановки и факториал, число сочетаний, треугольник Паскаля, умение применять правило комбинаторного умножения и комбинаторные формулы для решения задач» [3]. В ФГОС СОО среди умений, характеризующих предметные результаты, базовый уровень, находим: «применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач» [4]. Для углубленного уровня: «умение свободно оперировать понятиями сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок, бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения при решении задач» [4].

Примерная рабочая программа основного общего образования по математике для 5–9-х классов образовательных организаций, базовый уровень (ПРП ООО, 2021 г. [5]), включает в себя ПРП учебного курса «Вероятность и статистика» для 7–9-х классов. В структуре курса выделены четыре содержательно-методические линии: «Представление данных и описательная статистика»; «Вероятность»; «Элементы комбинаторики»; «Введение в теорию графов» [5]. В содержании курса комбинаторные вопросы появляются в явном виде лишь в 9-м классе. Именно здесь представлены следующие элементы содержания: «Перестановки и факториал. Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля. Решение задач с использованием комбинаторики» [5]. Предметные результаты освоения курса (9-й класс) характеризуются в том числе умениями «решать задачи организованным перебором вариантов, а также с использованием комбинаторных правил и методов» [5]. В тематическом планировании за 9-й класс представлен раздел «Элементы комбинаторики» (4 часа). Содержание раздела таково: «Комбинаторное правило умножения. Перестановки. Факториал. Сочетания и число сочетаний. Треугольник Паскаля. Практическая работа “Вычисление вероятностей с использованием комбинаторных функций электронных таблиц”» [5].

В примерной рабочей программе основного общего образования, Математика, углубленный уровень, 7–9-й классы (ПРП ООО, 2022 г. [5]), учебный курс «Вероятность и статистика» содержит уже шесть содержательно-методических линий. К «базовым» линиям добавлены «Множества» и «Логика» [5]. К сожалению, характеристики курса в части комбинаторики практически дословно повторяют соответствующие положения курса базового уровня. Так, в содержании, 9-й класс, выделены в том числе следующие позиции: «Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний и треугольник Паскаля. Свойства чисел сочетаний. Бином Ньютона. Решение задач с использованием комбинаторики». В тематическом планировании на изучение этих вопросов (раздел «Элементы комбинаторики», 9-й класс) отведено 6 часов. Да, существенной разницы нет, и увеличение числа часов на освоение раздела никак в содержании не отражено. Жаль.

Примерные рабочие программы среднего общего образования, Математика, также представлены на базовом и углубленном уровне (ПРП СОО, 2022 г.). В структуре курса «Вероятность и статистика» (как на базовом, так и на углубленном уровне) выделено две основные содержательные линии: «Случайные события и вероятности» и «Случайные величины и закон больших чисел» [5]. Содержание учебного курса включает в себя (10-й класс, базовый уровень) «Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона»; на углубленном уровне комбинаторные вопросы в содержании явно не выделены. Освоение учебного курса должно обеспечивать достижение следующих предметных образовательных результатов: «Применять комбинаторное правило умножения при решении задач» (10-й класс, базовый уровень); «Применять изученные комбинаторные формулы для перечисления элементов множеств, элементарных событий случайного опыта, решения задач по теории вероятностей» (10-й класс, углубленный уровень). В тематическом планировании за 10-й класс представлен раздел «Элементы комбинаторики» (3–4 часа), основное содержание которого состоит из следующих положений: «Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал. Число сочетаний. Треугольник Паскаля. Формула бинома Ньютона».

Опираясь на проведенный анализ ПРП ООО и СОО на предмет наличия и объема комбинаторных фактов, можно сделать вывод, что основной упор на изучение комбинаторики делается в 9-м классе, в то время как в старшей школе предусмотрено в лучшем случае «повторение пройденного», возможно, с небольшим расширением тематики. Кроме того, все четыре ПРП «крутятся» вокруг одних и тех же комбинаторных положений: правило умножения, перестановки и факториал, сочетания и треугольник Паскаля, наконец (не всегда) – бином Ньютона. Честно говоря, список небогатый и, что обиднее всего, почти никак не варьирующийся при переходе от базового уровня к углубленному и от основной школы к школе средней.

Для завершения изучения ситуации на федеральном уровне следует добавить к анализу стандартов и примерных рабочих программ анализ учебников из федерального перечня.

Анализ учебников

В новом федеральном перечне учебников (2022 г.) представлен ровно один учебник по курсу «Вероятность и статистика». Это учебник в двух частях (Высоцкий И. Р., Ященко И. В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9 классы: базовый уровень [6]). Ни книги для углубленного уровня, ни учебников для старшей школы в федеральном перечне мы не нашли. Конечно, существуют и другие пособия, в том числе тех же авторов [например: 7–9], но, анализируя нормативную базу, хотелось бы ориентироваться именно на федеральный перечень.

Учебник [6] полностью соответствует ФГОС и ПРП ООО и СОО. Именно в нем достаточно подробно проиллюстрировано правило умножения, на основе которого получена формула $n!$ для числа перестановок n элементов. Оставим в стороне вопрос «Почему не рассмотрено в явном виде комбинаторное правило сложения?». (Хотя это тоже вопрос не праздный, ведь о сумме случайных событий речь, конечно, идет, а ведь это очень связанные между собой факты. Да и при решении задач совсем обойти правило сложения не получится. А сказать о нем несколько слов либо «рядом» с правилом умножения, либо в каком-то другом месте нетрудно и полезно.) И вернемся к правилу умножения, которое уже позволило нам обоснованно получить число перестановок n элементов. Далее авторы вполне грамотно переходят к сочетаниям, подчеркивая их «неупорядоченный» характер. А вот затем говорят следующее: «Можно доказать, что число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$». Конечно, можно. Причем не только можно, но и нужно. Все инструменты для этого (все то же правило умножения!) у нас имеются. Нужно лишь ввести в рассмотрение незаслуженно выброшенные из списка изучаемых комбинаторных конфигураций размещения. Ведь они представляют собой не что иное, как «частичные перестановки» (именно так их называют в англоязычной литературе). Пользуясь правилом умножения, мы немедленно получаем формулу $A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$, откуда, поскольку понятие факториала уже освоено, классическую формулу $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Теперь можно завершить работу по доказательству формулы для числа сочетаний: из одного сочетания мы можем получить, переставляя имеющиеся m элементов произвольным образом, $m!$ размещений. Другими словами, $m!$ размещений дают ровно одно сочетание: $C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

На наш взгляд, польза, полученная от рассмотрения всех трех основных типов комбинаторных конфигураций и обоснованного вывода формул для их числа, полностью окупает потраченное дополнительно (небольшое) время. А если речь идет об углубленном уровне, методически целесообразно поговорить и о комбинаторных конфигурациях с повторениями (уж о размещениях с повторениями – обязательно).

Несколько слов о треугольнике Паскаля. Он вводится достаточно странно. Просто говорится, что числа сочетаний можно найти как по (недоказанной) явной формуле, так и из треугольника Паскаля. Далее дается краткая историческая справка и рисунок, в котором представлено 11 строк треугольника. Ни слова о том, как его построить (а ведь рекуррентная схема построения является простейшей!) нет. Странно. Ну, не хотим доказывать – не надо. Но рассказать ведь несложно. Хотя и доказать, что числа сочетаний обладают свойством $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, мы можем уже по крайней мере двумя способами, «в лоб», используя полученную выше явную формулу, и с помощью комбинаторных рассуждений.

Упоминания о биноме Ньютона мы в доступных нам учебниках не нашли. Конечно, бином появится позже. Но хотелось бы посмотреть, в каком формате. Про бином Ньютона мы тоже ничего не будем доказывать? И не скажем, что треугольник Паскаля и был изобретен как удобная аддитивная схема получения коэффициентов разложения бинома? Надеемся, что это не так и все важные факты будут представлены. Как и выше, много времени это не займет, а «картинка» окажется достаточно полной и обоснованной.

Перейдем к анализу задачного материала, связанного с комбинаторикой. Ориентируясь на учебники, мы будем делать основной акцент на материалы ОГЭ и ЕГЭ, поскольку именно они отражают требования к прохождению государственной итоговой аттестации [10; 11]. Заметим, что в материалах ОГЭ и ЕГЭ по математике задач «на комбинаторику» в явном виде не представлено, они «спрятаны» в задачи по теории вероятностей. При этом в контрольно-измерительных материалах (КИМ) Математической вертикали чисто комбинаторные задачи все же встречаются. Кроме того, комбинаторная задача (задание 8) представлена в материалах ЕГЭ по информатике. А если понимать под комбинаторной любую задачу на подсчет вариантов (что соответствует сути данного раздела математической науки), то и задача на подсчет числа путей в ориентированном графе (задание 13 ЕГЭ, задание 9 ОГЭ по информатике) заслуживает упоминания..

Комбинаторика и базовые задачи по теории вероятностей

Проанализируем несложные задачи по теории вероятностей, так или иначе связанные с комбинаторикой.

1. Рассмотрим простейшие задачи, присутствующие уже в материалах ОГЭ.

- *«Бабушка купила пирожки: 4 с рисом, 8 с мясом и 3 с повидлом. Катя случайным образом выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что Катя выберет пирожок с повидлом»* (ОГЭ, 2022 г.).

Есть ли тут комбинаторика? Формально – да. Все же мы делаем выбор, а именно выбираем один объект из 15 разных объектов (знаменатель) и один объект из 3 разных объектов (числитель). Но по сути никакой содержательной комбинаторики в таких задачах нет, хотя при решении обсудить явно поставленные комбинаторные вопросы: «Сколько всего существует возможностей выбора?», «Сколькими способами можно выбрать любимый пирожок?» – не помешает.

2. Рассмотрим теперь более содержательные, но тоже совсем несложные задачи «на вероятность», при решении которых существенно используется комбинаторный подход. Таких задач, вполне симпатичных, много в учебнике [6].

- *«В коробке лежат 4 белых и 2 черных шара. Петя наугад вынул из коробки 3 шара. Какова вероятность того, что он вынул 3 белых шара?»* [5, с. 179].

Решение, представленное в учебнике, основано на комбинаторных подсчетах. Всего имеется возможностей выбрать 3 шара из 6: это знаменатель. В числителе стоит величина – число способов выбрать 3 шара из 4 белых. Таким образом, в ответе получаем 0,2.

К сожалению, в материалах ЕГЭ таких «прозрачных» примеров немного. Чаще они встречаются в КИМ Математической вертикали.

- *«На день рождения Петя решил угостить товарищей конфетами. Он приготовил 11 “Белочек”, 9 трюфелей и 5 “Мишек”. Наугад доставая по одной конфете из пакета, Петя первой угостил Машу, а вторым – Егора. а) Какова вероятность того, что Маша получила “Мишку”? б) Какова вероятность того, что Маша и Егор получили по трюфелю?»* (Математическая вертикаль, 2020 г.)

Первое задание ничем не отличается от пирожков, ответ 0,2 получается обычным образом. А вот решение второго задания может быть разным. Прежде всего, прямое использование правила произведения: в знаменателе 25 · 24 – общее число возможностей; в числителе 9 · 8 – число благоприятных исходов; ответ 0,12. Классическая комбинаторная схема: в знаменателе число $A_{25}^2 = 25!/23! = 25 \cdot 24$ размещений из 25 элементов по 2 элемента, в числителе – число $A_9^2 = 9!/7! = 9 \cdot 8$ размещений из 9 элементов по 2 элемента; ответ 0,12. Вероятностный подход: $P(AB) = P(A)P_A(B) = (9/25) \cdot (8/24) = 0{,}12$, где событие A – «Маша получила трюфель» и событие B – «Егору достался трюфель». Благодаря четко сформулированным условиям, разночтений здесь нет. Для профильного уровня ЕГЭ такая задача – в самый раз. Заметим, что комбинаторная схема легко реализуется, но для этого ученик должен быть знаком с понятием размещения. Впрочем, правила произведения для решения задачи вполне достаточно.

Комбинаторика и вероятностные задачи: вопросы и размышления

Рассмотрев задачи, которые не вызывают у нас вопросов, поговорим о ситуациях, когда вопросы так или иначе возникают.

1. Сначала скажем несколько слов о простых по сути своей задачах, которые, тем не менее, могут вызвать затруднения обучающихся в силу их формулировок. Сравним две задачи из ЕГЭ, базовый уровень.

- *«В музыкальном конкурсе участвуют 35 скрипачей: 7 из Франции, 12 из Англии, 9 из Финляндии и 7 из Дании. Порядок их выступлений определяет жеребьевка. Какова вероятность того, что первым будет выступать французский скрипач?»* (ЕГЭ, базовый уровень, 2021 г.)

Судя по всему, авторы задачи не считают нужным считать элементарным исходом тот или иной результат жеребьевки (хотя именно этого требует условие) и рассматривают данную задачу как альтернативную формулировку задачи «про пирожки». Ответ 0,2 получается построением дроби, в знаменателе которой стоит число 35 (первым выступающим может стать любой скрипач), а в числителе – число 7 (благоприятные для нас случаи, когда первым будет выступать один из 7 французов). Однако данная задача, в силу ее формулировки, требует другого решения: нужно, анализируя результаты жеребьевки, использовать перестановки; знаменатель равен 35! (общее число жеребьевок), числитель равен 7 · 34! (число жеребьевок, в которых первым оказался скрипач-француз). Ответ, конечно, тот же. Но хотя комбинаторное решение более громоздко, именно оно является правильным с точки зрения используемой модели. Вероятностная формулировка позволяет уйти от комбинаторной сути задачи, что, на наш взгляд, методически недопустимо, хотя, безусловно, облегчает решение. Если авторы задачи не планировали проверять комбинаторную основу исследуемой модели, нужно изменить формулировку, убрав лишние данные. Если комбинаторику планировалось задействовать, желательно добавить в условие «комбинаторные» вопросы: «Сколько существует способов провести жеребьевку?», «Сколько существует способов провести жеребьевку так, чтобы первым выступал француз?» В этом случае добавление «вероятностного» вопроса не спровоцирует реализацию «облегченного» решения.

Рассмотрим еще одну задачу.

- *«В студенческой группе 8 студентов. По жребию они выбирают двух дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будет Петя»* (ЕГЭ, базовый уровень, 2022 г.)

На наш взгляд, при решении задачи разумно использовать комбинаторный подход. В этом случае вероятность «строится» как дробь, в знаменателе которой стоит число $C_8^2 = \dfrac{8!}{2!\,6!} = \dfrac{8 \cdot 7}{2}$, а в числителе C_7^1, что дает 7 · 2/8 · 7 = = 2/8 = 0,25. Но в Интернете мы находим более простое решение. Поскольку бросается жребий, то имеется 8 листочков, на 6 из которых стоит знак «–», а на 2 – знак «+». Петя выбирает один из 8 листочков. Всего у него 8 возможностей выбора, в то время как благоприятных – два. Итак, ответ равен 2/8 = 0,25.

У объективного читателя такое решение может вызвать ряд естественных возражений: «Если Петя тянет жребий первым, то вопросов нет, но если он тянет жребий третьим, почему вероятность будет той же?»; «Более того, он может знать, что перед ним вытащили один +». Здесь возникает та же проблема, что и в предыдущей задаче. Приведенное решение «отсекает» часть предлагаемой в задачи комбинаторной модели и рассматривает лишь студента Петю, не принимая во внимание остальных. Мы считаем такое решение нелегитимным для задачи в указанной формулировке. Скорее решение без сочетаний может быть таким: мы рассаживаем 8 человек по восьми местам, из которых два отмечены +. Всего рассадок 8!, из них благоприятных 2 · 7!.

И в том, и в другом случае авторы статьи реализуют комбинаторный подход. Чтобы научиться использовать более простую модель, нужно получить опыт ее использования. Это как раз тот случай, когда в учебнике примеров решения таких задач не найти. Очень жаль. Без образцов, на которые можно ориентироваться, без накопления опыта решения задач разного типа полноценного освоения теории вероятностей школьниками не получить. Кроме того, как и прежде, второй подход пренебрегает комбинаторными основаниями формулировки задачи, а стоит ли? Мы настаиваем, что в случае указанной выше формулировки задачи для ее решения следует использовать общую комбинаторную модель. Для обоснования своей позиции мы хотели бы сослаться на А. Н. Колмогорова [12, с. 46] (см. также [2], где задача рассмотрена подробно).

2. Рассмотрим теперь ряд задач профильного уровня, которые хотелось бы обсудить с точки зрения целесообразности их использования в учебном процессе.

Например, проанализируем такую задачу.

- *«В ящике находится 11 черных, 6 белых и 8 красных шаров. Петя наугад выбирает 2 шара. Какова вероятность, что Пете достанется один черный и один белый шар?»* (ЕГЭ, профильный уровень, 2022 г.)

Ответ на поставленный в задаче вопрос может быть получен как (11 · 6 + + 6 · 11) / 25 · 24. Комбинаторные соображения таковы. В знаменателе стоит число размещений A_{25}^{2} = 25 · 24 из 25 по 2. Из 25 шаров выбираем два, порядок важен. Находим числитель: $A_{11}^{1} \cdot A_{6}^{1} + A_{6}^{1} \cdot A_{11}^{1}$. В первом слагаемом подсчитан выбор одного черного и затем одного белого шара; во втором – выбор одного белого и затем одного черного шара. При решении данной задачи может возникнуть проблема. Действительно ли нужно использовать при подсчете размещения, ведь порядок выбора шаров может быть и неважен? Напомним, что ранее была рассмотрена похожая задача про конфеты. Но там важность порядка была обозначена априори. Заметим, что получить рассмотренную выше дробь можно и с помощью чисто вероятностного подхода, используя формулу $P(AB + BA) = P(A)P_A(B) + P(B)P_B(A)$, где событие A – «выбор черного шара», а событие B – «выбор белого шара». Так что использование именно размещений выглядит в данном случае вполне легитимным. Но если хотите использовать сочетания – используйте: $\frac{C_{11}^{1} \cdot C_{6}^{1}}{C_{25}^{2}}$ (11 · 6)· 2/25 · 24. Возникает вопрос: случайно ли совпадение ответов при рассмотрении двух разных комбинаторных конфигураций? И еще один вопрос, методический: нужно ли школьникам вникать в эти тонкости?

Еще одна задача, тоже из ЕГЭ. В Математической вертикали она представлена как задача «об автобусах».

- *«Класс из 21 человека случайным образом рассаживают в три семиместных автобуса. а) Какова вероятность того, что Петя и Маша поедут в одном автобусе? б) В разных* *автобусах? в) Какова вероятность того, что Петя поедет в первом автобусе, если известно, что Маша – в третьем?»* (Математическая вертикаль, 2022 г.)

Авторы, приученные к классической схеме работы, при решении задачи начинают рассаживать всех школьников, и задача становится громоздкой. Элементарными исходами являются в данном случае распределения человека по 21 месту, то есть перестановки из 21 элемента, а благоприятными исходами – некоторые из этих перестановок. Для двух человек в одной группе количество благоприятных исходов равно 3 · 7 · 6 · 19!, что дает ответ 3 · 7 · 6 · 19!/21! = 0,3. Для двух человек в разных группах количество благоприятных исходов равно 3 · 7 · 2 · 7 · 19!, что дает ответ 0,7. Для ответа на третий вопрос количество благоприятных исходов подсчитываем по формуле 7 · 7 · 19!, что дает ответ 7/60.

При этом в вероятностной интерпретации задача допускает более простое решение. В первом случае Петю сажаем куда-нибудь, затем в тот же автобус «подсаживаем» Машу с вероятностью 6/20 = 0,3 (6 – число свободных мест в автобусе, где уже находится Иван, 20 – число оставшихся свободных мест во всех автобусах). Если автобусы для Пети и Маши разные, то числитель равен 14 (числу свободных мест в двух автобусах «без Пети»), а вероятность определяется дробью 14/20 = 0,7. Просто. Однако, во-первых, о существовании такого подхода нужно знать. Объективно он опирается на понятие условной вероятности, и к этой задаче целесообразно вернуться, когда школьникам будет рассказана условная вероятность. Во-вторых, как и в задаче про жеребьевку, возникают «ножницы» между комбинаторной сутью используемой в задаче модели и вероятностным решением, использующем лишь часть указанной модели.

Просто комбинаторные задачи: и снова вопросы

Если в материалах ОГЭ и ЕГЭ задач с чисто комбинаторной формулировкой мы не найдем, то КИМ Математической вертикали такие задания содержат. Более того, здесь можно найти задачи, отличающиеся существенно другим подходом к комбинаторным конфигурациям. Рассмотрим пример.

- *«В зоомагазине продаются рыбки пяти пород. Света пришла купить трех рыбок. Сколькими способами она может выбрать трех рыбок так, что: а) все рыбки будут разных пород; б) рыбки будут только двух пород?»* (Математическая вертикаль, 2020 г.)

Решение здесь достаточно прозрачное. Выбираем не столько рыбок, сколько их породу. Из пяти пород три различных можно выбрать 10 способами (число сочетаний из 5 по 3). Если используем только две породы, то обязательно купим двух рыбок одной породы, и одну – другой. Поэтому ответ 20 получается как число 20 = 5 · 4 размещений из 5 по 2 (купим двух рыбок первой породы и одну второй). Впрочем, количество способов купить три рыбки разных пород можно найти и с помощью правила умножения. Вычисляем количество способов выбрать первую рыбку (5 вариантов), вторую рыбку (4 варианта) и третью рыбку (3 варианта), всего 5 · 4 · 3 возможностей, и делим на количество 3! перестановок трех рыбок разных пород.

Задача неплохая. Отметим два нюанса. Во-первых, в ходе решения существенно использован комбинаторный подход. Он же останется востребованным, если мы перейдем к вероятностной формулировке: *«Какова вероятность, что при покупке трех рыбок будут куплены рыбки трех пород? Ровно двух пород?»* Здесь для подсчета знаменателя удобно воспользоваться формулой для сочетаний с повторениями: число таких сочетаний из 5 по 3 равно 35. Непосредственный подсчет был бы затруднен. Во-вторых, это первая задача из проанализированных, в которой речь идет о неразличимых элементах (рыбок одной породы мы считаем идентичными).

Сама по себе задача вполне приемлема с точки зрения доступности ее решения для школьников. Однако в данном случае дело не столько в решении конкретной задачи, сколько в том, как после ее решения ученик должен анализировать задачу такую: *«Сколькими способами можно выбрать из 10 красных, 2 синих, 5 зеленых, 4 черных и 8 белых тюльпанов а) один цветок; б) три цветка?»* Для удобства используем вероятностную формулировку: *«Какова вероятность, что при выборе одного цветка из 10 красных, 2 синих, 5 зеленых, 4 черных и 8 белых тюльпанов мы выберем белый тюльпан? При выборе букета из трех тюльпанов все три цветка будут разного цвета?».*

Если считать, что тюльпаны одного цвета неразличимы, то мы только что нашли ответ 10/35 = 2/7 на второй вопрос, исследуя ситуацию с рыбками пяти пород. Но формулировка задачи все же другая. И если рассматривать задачу независимо от предыдущей, в такой формулировке все цветы должны быть различны. Почему? Хотя бы потому, что первый вопрос – о белом тюльпане – это задача о пирожках. Итак, это априори «другая задача». Другими словами, мы приспосабливается к разным формулировкам разных задач и, прежде чем отвечать на тот или иной вопрос, должны определиться с классом задач, в который данный конкретный вопрос попадает. Плохого в этом ничего нет. Но неясности возникают даже у специалистов. А что говорить об учениках?

И все же попробуем разобраться. Рассмотрим задачу о цветах более пристально. Сначала решим простенькую комбинаторную задачку.

- *«Сколькими способами можно выбрать букет из трех цветов, если имеется 5 роз и 7 пионов?»*

Если все цветы различны, то выбираем из 12 различных предметов три. Повторений нет, порядок неважен. Итак, имеем $C_{12}^{3} = \dfrac{12!}{3!\,9!} = 220$ возможностей. А если все цветы одинаковы, то есть как розы, так и пионы между собой неразличимы? Тогда выбираем букет, состоящий либо из трех роз, либо из одной розы и двух пионов, либо из двух роз и одного пиона, либо из трех пионов. Все. Это соединения из двух по три с повторениями без учета порядка, $\overline{C_2^3} = C_4^3 = 4.$

А затем перейдем к вероятности.

- *«Имеется 5 роз и 7 пионов. Какова вероятность, что при случайном выборе цветов мы получим букет из трех роз?»*

В первой модели пересчитываем все сочетания из 5 по 3, дающие благоприятные случаи, и делим полученное число на общее количество случаев, то есть на число сочетаний из 12 по 3: $\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}.$ Во второй модели получается 1/4 (три розы имеем только в одном случае из четырех возможных), то есть 0,25.

Формально обе модели имеют право на существование, однако с практической точки зрения (мы бы сказали, интуитивно) первый вариант гораздо предпочтительней. Конечно, можно сказать, что приведены примеры совершенно разных задач. Согласны. Но как ученик должен понять, что задачи разные? Мы считаем, что решением проблемы будет такой подход: если речь идет о первой модели, то добавление слова «различных» не утяжелит текст, но прояснит ситуацию. А для второй модели следует использовать формулировку «про рыбок», не уточняя количество элементов каждого типа: *«В магазине имеются розы и пионы. Какова вероятность, что при случайном выборе цветов мы получим букет из трех роз?»* Конечно, можно совсем не рассматривать задачи такого плана. Но они существуют. И если комбинаторике, именно комбинаторике уделить немного больше внимания, то многие проблемы можно решить естественным образом.

Выводы и предложения

Итак, мы рассмотрели ряд проблем, связанных с изучением элементов комбинаторики в современной школе. Обобщим сказанное.

1. Прежде всего, на наш взгляд, стоит подумать над расширением содержательной базы раздела «Элементы комбинаторики». В частности, помимо перестановок и сочетаний, можно и нужно добавить как минимум размещения, кроме того, провести соответствующие доказательные рассуждения.

2. Какие вероятностные задачи, помимо простейших, предлагать школьникам? На наш взгляд, следует расширить список задач, решаемых классическим комбинаторным методом. Такие задачи есть, и их разумное тиражирование пойдет на пользу как комбинаторике, так и теории вероятностей. При этом хотелось бы избегать вероятностных задач на основе комбинаторных моделей, при решении которых происходит «обрубание» части комбинаторной ситуации.

3. Нужен хороший учебник. Возможно, вероятностный подход к решению задач, ведущий к «обрубанию» комбинаторных моделей, вполне оправдан в свете поставленной задачи: научить школьников «чувствовать» вероятность. Возможно. Но если мы хотим научить такому подходу, то ему нужно учить. Где можно хотя бы посмотреть примеры решения соответствующих задач? В основном – в Интернете. А Интернет – это не догма и даже не руководство к действию. У нас есть вопросы. Хотелось бы получить на них обоснованные ответы.

4. Как готовить студентов к обучению школьников элементам комбинаторики? Как ни странно, такой вопрос перед нами не стоит. Наша позиция заключается в том, что комбинаторику можно и нужно изучать независимо от теории вероятностей, например, в курсе «Дискретная математика». Именно так обстоят дела при обучении будущих учителей в Институте математики и информатики Московского педагогического государственного университета (ИМИ МПГУ). Наши студенты получают хорошую подготовку по комбинаторике в рамках курса дискретной математики, помимо комбинаторики включающего в себя теорию графов и теорию рекуррентных соотношений [13].

Более того, мы считаем, что давно созрела необходимость введения курса дискретной математики и в обучение школьной математике, по крайней мере на профильном уровне. Именно в этот курс как одна из существенных составляющих естественным образом войдет, помимо комбинаторики, теория графов, которая пока используется, как и комбинаторика, на службе у вероятности, что с точки зрения математической науки неверно. Полезным будет и систематическое изложение теории рекуррентных соотношений. Появление в школе курса по теории вероятностей и статистике – первая ласточка, позволяющая нам надеяться на дальнейшие подвижки. Курс дискретной математики в школе нужен. Нужен так же, как и курс арифметики (теории чисел). Мы поговорим об этом в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* К вопросу о стохастической составляющей математической подготовки школьников и студентов. Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Киров: ВятГУ, 2022. С. 73–75.
2. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226.
3. Федеральный государственный стандарт основного общего образования. М., 2021. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia (дата обращения: 29.09.2023).
4. Федеральный государственный стандарт среднего общего образования. М., 2022. URL: https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (дата обращения: 29.09.2023).
5. Примерные рабочие программы учебного предмета «Математика» для образовательных организаций. М., 2022. URL: https://fgosreestr.ru/oop?sub=16 (дата обращения: 29.09.2023).
6. *Высоцкий И. Р., Ященко И. В.* Математика. Вероятность и статистика: 7–9 классы, базовый уровень. Учебник: в 2 ч. Ч. 2. М.: Просвещение, 2023. 111 с.
7. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Тюрин [и др.]. М.: МЦНМО, 2014. 248 с.
8. Математическая вертикаль. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы / И. Р. Высоцкий [и др.]. М.: Просвещение, 2020. 256 с.
9. *Высоцкий И. Р., Ященко И. В.* Математика. Универсальный многоуровневый сборник задач. 7–9 классы: в 3 ч. Ч. 3: Статистика. Вероятность. Комбинаторика. Практические задачи. М.: Просвещение, 2020. 238 с.
10. Открытый банк заданий ОГЭ. М., 2022. URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (дата обращения: 29.09.2023).
11. Открытый банк заданий ЕГЭ. М., 2023. URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 29.09.2023).
12. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. (Б-чка «Квант». Вып. 23). М.: Наука, 1982. 160 с.
13. *Деза Е. И., Модель Д. Л.* Основы дискретной математики: учеб. пособие. М.: URSS, 2020. 224 с.

REFERENCES

1. Vetokhin A. N., Deza E. I. K voprosu o stokhasticheskoy sostavlyayushchey matematicheskoy podgotovki shkolnikov i studentov. *Proceedings of the 41th International scientific seminar.* Kirov: VyatGU, 2022. Pp. 73–75.
2. Vetokhin A. N., Deza E. I. O meste teoretiko-veroyatnostnykh zadach v matematicheskoy podgotovke shkolnikov. *Nauka i shkola*. 2023, No. 2, pp. 214–226.
3. Federalnyy gosudarstvennyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya. Moscow, 2021. *Available at:* https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia (accessed: 29.09.2023).
4. Federalnyy gosudarstvennyy standart srednego obshchego obrazovaniya. Moscow, 2022. *Available at:* https://fgosreestr.ru/educational_standard/federalnyi-gosudarstvennyi-obrazovatelnyi-standart-srednego-obshchego-obrazovaniia-1 (accessed: 29.09.2023).
5. Primernye rabochie programmy uchebnogo predmeta “Matematika” dlya obrazovatelnykh organizatsiy. Moscow, 2022. *Available at:* https://fgosreestr.ru/oop?sub=16 (accessed: 29.09.2023).
6. Vysotskiy I. R., Yashchenko I. V. *Matematika. Veroyatnost i statistika: 7–9 klassy, bazovyy uroven. Uchebnik. Part 2.* Moscow: Prosveshchenie, 2023. 111 p.
7. Tyurin Yu. N. et al. *Teoriya veroyatnostey i statistika. Eksperimentalnoe uchebnoe posobie dlya 10 i 11 klassov obshcheobrazovatelnykh uchrezhdeniy*. Moscow: MTsNMO, 2014. 248 p.
8. Vysotskiy I. R. et al. *Matematicheskaya vertikal. Teoriya veroyatnostey i statistika. 7–9 klassy.* Moscow: Prosveshchenie, 2020. 256 p.

9. Vysotskiy I. R., Yashchenko I. V. *Matematika. Universalnyy mnogourovnevyy sbornik zadach. 7–9 klassy. Part 3: Statistika. Veroyatnost. Kombinatorika. Prakticheskie zadachi*. Moscow: Prosveshchenie, 2020. 238 p.
10. Otkrytyy bank zadaniy OGE. Moscow, 2022. *Available at:* https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (accessed: 29.09.2023).
11. Otkrytyy bank zadaniy EGE. Moscow, 2023. *Available at:* https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (accessed: 29.09.2023).
12. Kolmogorov A. N., Zhurbenko I. G., Prokhorov A. V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey*. Moscow: Nauka, 1982. 160 p. (B-chka “Kvant”. Iss. 23).
13. Deza E. I., Model D. L. *Osnovy diskretnoy matematiki: ucheb. posobie*. Moscow: URSS, 2020. 224 p.

Деза Елена Ивановна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики Института математики и информатики, Московский педагогический государственный университет

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Deza Elena I., ScD in Education, Full Professor, Professor, Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Ветохин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; профессор кафедры ФН-1«Высшая математика», Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

e-mail: anveto27@yandex.ru

Vetokhin Alexander N., ScD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Differential Equations Department, Faculty of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University; Professor, Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University

e-mail: anveto27@yandex.ru

Модель Дмитрий Лазаревич, директор, Школа № 2016 города Москвы

e-mail: dmodel80@gmail.com

Model Dmitry L., Headmaster, School No. 2016, Moscow

e-mail: dmodel80@gmail.com

Статья поступила в редакцию 29.08.2023
The article was received on 29.08.2023