УДК 373.5+372.851
ББК 74.26
DOI: 10.31862/1819-463X-2024-2-160-168

ПРИЕМЫ СХЕМАТИЗАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ 7–9 КЛАССОВ ДОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАССУЖДЕНИЯМ В РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

М. В. Егупова, Ю. А. Глазков, Л. Ю. Есина

Аннотация. *В статье представлен один из типов заданий новой рабочей тетради по геометрии для 7-го класса к учебнику авторов Л. С. Атанасян и др. Предлагается использовать наглядные схемы для обучения доказательным рассуждениям. Описаны различные виды упражнений, основой которых является прием схематизации, способствующий осознанному овладению учащимся процессом решения задачи на доказательство. Также рассмотрены приемы развития умения самоорганизации при работе со схемами.*

Ключевые слова: *схематизация, обучение доказательным рассуждениям, решение геометрической задачи, рабочая тетрадь, самоорганизация.*

Для цитирования: *Егупова М. В., Глазков Ю. А., Есина Л. Ю.* Приемы схематизации при обучении школьников 7–9 классов доказательным рассуждениям в решении геометрической задачи // Наука и школа. 2024. № 2. С. 160–168. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-2-160-168.

SCHEMATIZATION TECHNIQUES WHEN TEACHING CONCLUSIVE REASONING IN SOLVING A GEOMETRIC PROBLEM IN GRADES 7–9

M. V. Egupova, Yu. A. Glazkov, L. Yu. Esina

Abstract. *The article presents one of the types of tasks in the new workbook on geometry for grade 7 for the textbook by L. S. Atanasjan, et al. It is proposed to use visual diagrams for teaching conclusive reasoning. Various types of exercises are described, the basis of which is the technique of schematization, which promotes the student's conscious mastery of the process of solving a proof problem. Techniques for developing self-organization skills when working with diagrams are also considered.*

Keywords: *schematization, teaching conclusive reasoning, solving a geometric problem, workbook, self-organization.*

Cite as: Egupova M. V., Glazkov Yu. A., Esina L. Yu. Schematization techniques when teaching conclusive reasoning in solving a geometric problem in grades 7–9. *Nauka i shkola.* 2024, No 2, pp. 160–168. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-2-160-168.

В предисловии для учителей в известной книге «Элементарная геометрия» (1972 г.) Алексей Васильевич Погорелов, обозначая роль и значение изучения этой науки школьниками, высказывает суждения, которые неоспоримо актуальны и сегодня: «...главная задача преподавания геометрии в школе – научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Очень немногие из окончивших школу будут математиками, тем более геометрами. <...> Однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать» [1, с. 7].

А значит, изучение геометрии является важным условием формирования умственной культуры школьника, необходимой как для дальнейшей социальной жизни в обществе, так и для успешной профессиональной деятельности.

Ежегодный анализ результатов выполнения заданий по геометрии участниками ОГЭ и ЕГЭ как базового, так и профильного уровней показывает, что типичными являются логические ошибки, допускаемые в доказательствах и при анализе утверждений; неверные выводы в завершение цепочки рассуждений; неполное или неверное обоснование шагов рассуждений. Процент невыполненных заданий по геометрии по сравнению с другими заданиями довольно высок, что свидетельствует о недостаточном уровне достижения образовательных результатов.

В теории и методике обучения математике проблема обучения геометрии в школе ставилась неоднократно. Учеными признавался факт как повышенной сложности этого учебного курса, так и его особой важности для математического образования учащихся. Разрабатывались различные концепции обучения геометрии в школе, проектировались системы геометрических задач, специальные приемы обучения. Центральным вопросом в методике обучения геометрии считается вопрос об обучении доказательным рассуждениям. Заметим, что выделенные выше типичные ошибки школьников как раз и связаны с умением доказывать, обосновывать шаги решения.

Восприятие однородного учебного текста, представленного в едином стиле, с вербальной линейной структурой вызывает у школьника затруднения в выполнении мыслительных операций анализа, синтеза, аналогии и др., являющихся основой доказательных рассуждений. Представление решения геометрической задачи в виде схемы поможет учащемуся уменьшить эти трудности, поскольку схема иллюстрирует взаимосвязи шагов решения и делает решение наглядным.

В теории и методике обучения математике утверждается, что применение приемов схематизации решения задач целесообразно при демонстрации методов доказательства, организации работы с учебным материалом и контроля его усвоения, а также для классификации задач.

Г. И. Саранцев, излагая логические основы доказательства, приводит схемы, иллюстрирующие приемы прямого доказательства. Также автор отмечает необходимость ознакомления школьников с логическими схемами доказательства, используя специальную символику [2].

В. В. Орлов предлагает составлять схемы поиска решения геометрической задачи на доказательство, отражающие последовательность рассуждений от требования [3]. По такой схеме учащиеся должны записать решение как последовательность следствий уже из условия задачи.

К. Я. Хабибуллин рассматривает схемы «в виде незаполненных клеточек-ячеек, которые соединены стрелками», которые представляют наглядный ход решения задачи [4]. Автор называет этот вид схем граф-схемами и видит в них средство развития творческой деятельности учащихся. Граф-схемы помещаются на карточки и используются для текущего контроля. На такой карточке, помимо частично заполненной схемы, приводится рисунок к задаче.

Г. А. Клековкин, А. А. Максютин предлагают использовать граф-схемы решений задач для оценки их сложности. Авторы за «параметр структурной сложности решения задачи» [5] принимают максимальный уровень сложности ключевых задач, встречающихся в ее решении.

В. М. Имайкин утверждает, что учащимся целесообразно не только предъявлять готовые схемы при изучении доказательства, которое в учебнике, как правило, представлено в текстовой форме, но и обучать их составлять такие схемы самостоятельно, обозначая стрелками логические взаимосвязи утверждений [6].

Л. И. Боженкова предлагает использовать в обучении математике различные классификационные и систематизационные схемы для понимания и запоминания учебной информации. В частности, при формировании познавательных универсальных учебных действий как упражнение для школьников рассматривается составление двух видов схем определения понятия и поиска решения задачи (в том числе на доказательство) [7].

Как видим, приемы схематизации представлены в теории обучения математике, описаны в методических рекомендациях для учителей и признаны полезными. Но в учебниках и учебных пособиях как современных, так и прошлых лет подобные схемы не обнаружены. Попытка восполнить этот пробел реализована в новой рабочей тетради по геометрии для 7-го класса [8] к учебнику геометрии для 7–9-х классов авторов Л. С. Атанасяна и др. [9].

Это учебное пособие для базового уровня обучения традиционно составлено из заданий с пропусками, демонстрирующих образцы доказательных рассуждений при решении задач и способствующих овладению школьниками математическим языком.

В рабочую тетрадь включены задания на подведение под понятие, выделение существенных признаков понятия, приведение контрпримеров, на классификацию, на практические приложения геометрии и ряд других. Очевидно, что объем печатного издания не позволяет включить достаточное количество заданий определенного типа. Поэтому каждый тип заданий может быть использован учителем для создания аналогичных заданий с теми же дидактическими функциями.

Остановимся подробнее на предлагаемых в пособии заданиях, в состав которых с различными целями включены наглядные схемы.

Первая схема в задании представлена в главе II «Треугольники. §1. Первый признак равенства треугольников» и предназначена для обучения школьников получению следствий из условия задачи, а также для знакомства с приемом схематизации. Приведем его.

Задание 1. Известно, что треугольники *EFH* и *OKR* равны. Сформулируйте выводы о равенстве углов и сторон этих треугольников. Результат оформите в виде схемы [8, с. 22].

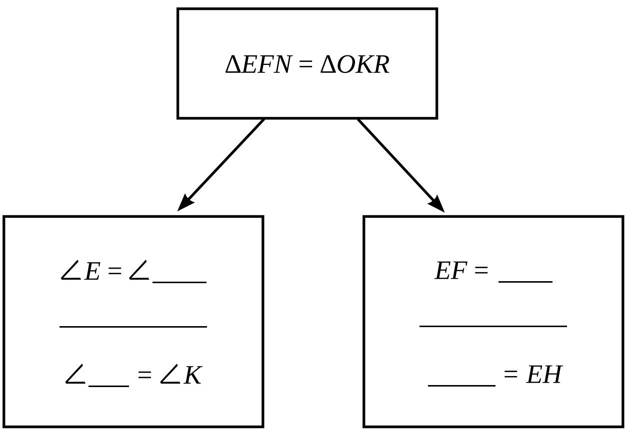

Рис. 1. Наглядная схема к заданию 1

На схеме (рис. 1) иллюстрируется применение следующих утверждений из учебника: «если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника», «в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны» [9, с. 30]. Обратим внимание, что в этом задании пока не требуется обосновывать сделанные выводы, но в дальнейшем это требование будет добавлено. Здесь обоснованием выводов является определение равенства треугольников. Но в учебнике на этом этапе обучения геометрии еще не вводится явно такой вид утверждения, как определение. Это происходит позже, в §4 этой же главы.

Подобные короткие схемы целесообразно составлять и для других геометрических ситуаций, встречающихся в задачах. Например, к задаче 102 [9, с. 32] «Отрезки *AC* и *BD* точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что Δ*ABC* = Δ*CDA*» можно составить подводящее задание.

Задание 2. Известно, что отрезки *MT* и *AB* точкой пересечения *O* делятся пополам. Сформулируйте выводы об образовавшихся равных углах и отрезках. Результат оформите в виде схемы (рис. 2).

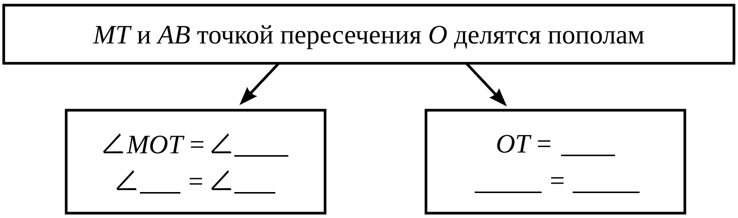

Рис. 2. Наглядная схема к заданию 2

Далее в §2 «Медианы, биссектрисы и высоты треугольника» второй главы возможно рассмотреть более сложную геометрическую ситуацию.

Задание 3. Выведите следствия из утверждения: *треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC и высотой BH.* Сделайте рисунок и заполните пропуски на схеме. Какие еще следствия возможно получить? Дополните схему самостоятельно (рис. 3).

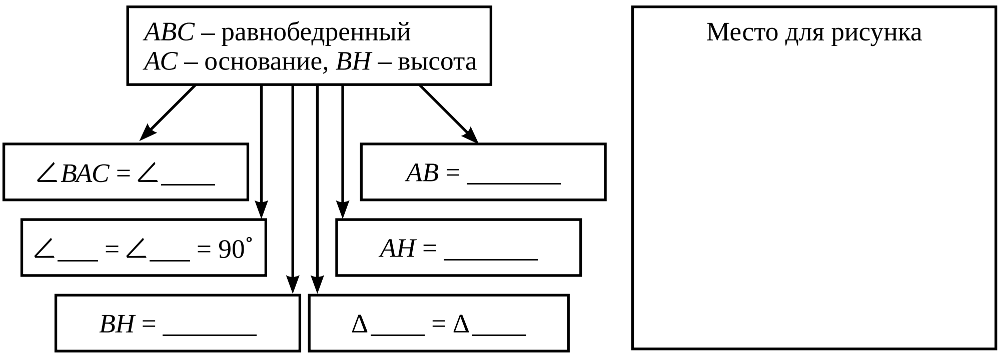

Рис. 3. Наглядная схема к заданию 3

Дальнейшая работа со схемами будет направлена на понимание школьниками сути доказательных рассуждений при рассмотрении теорем и решении задач. Однако по мере необходимости подобные геометрические ситуации как составляющие рассуждений могут быть неоднократно рассмотрены.

Понятие доказательства на этом этапе обучения геометрии является для школьников новым: оно впервые введено в учебнике в §1, п. 15 «Первый признак равенства треугольников». Поэтому для овладения этим понятием в рабочей тетради сначала предлагается задание по составлению схемы по готовому доказательству, а затем наоборот. Для такой работы выбраны важные задачи-факты (по классификации И. Ф. Шарыгина [10]), имеющие довольно короткие доказательства, по которым удобно составить наглядные схемы. Приведем пример двух таких взаимосвязанных заданий [8, с. 28–29].

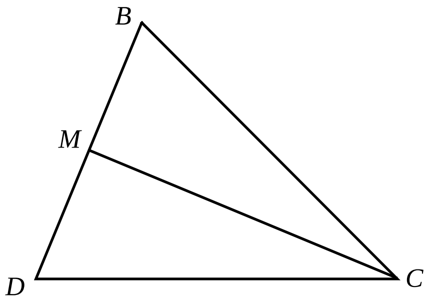

Рис. 4. Рисунок к заданию 4

Задание 4. Медиана треугольника совпадает с его высотой (рис. 4). Докажите, что треугольник равнобедренный, заполнив пропуски.

Дано: ΔBCD, CM – медиана и высота.

Доказать: Δ ______ равнобедренный.

Доказательство:

1) Отрезок CM – медиана треугольника ______. Следовательно, BM = ______ (по определению ______________).

Так как отрезок ______ – высота, то CM ___ BD (по определению _____________), значит, $\angle CMB = \angle$____.

2) В треугольниках BCM и _______ сторона _____ общая, ____ $= DM$, $\angle CMB$ = = $\angle$_____. Следовательно, по первому __________ _____________ треугольников Δ _______ $= \Delta DCM$, поэтому BC =_____, то есть треугольник BCD ________________.

Что и требовалось доказать.

Задание 5. Оформите это же доказательство в виде схемы (рис. 5), заполнив пропуски.

В схеме записано условие (что дано) и заключение (что требуется доказать), а также показан ход рассуждений.

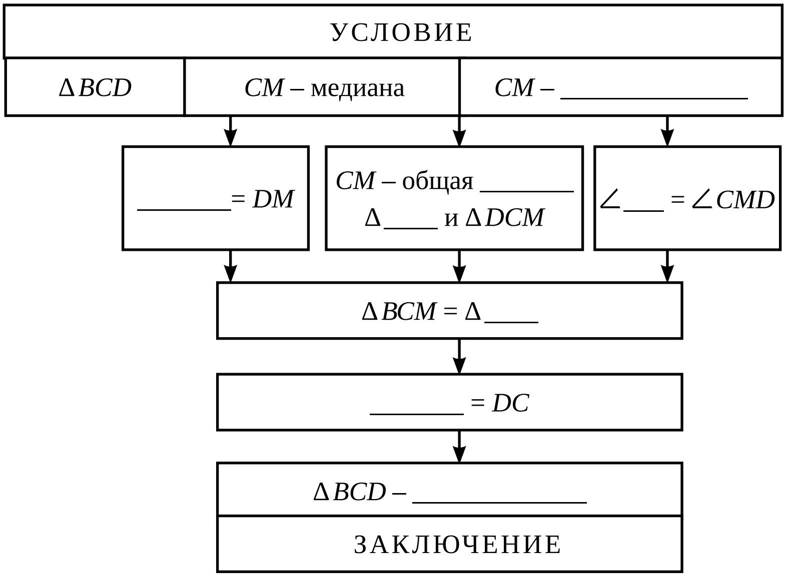

Рис. 5. Наглядная схема к заданию 5

Эта схема наглядно показывает школьникам, что доказательство — это рассуждения, представленные как последовательность умозаключений.

Еще один вид заданий рабочей тетради, в котором используются схемы, способствует обучению методу дополнительных построений (или методу вспомогательных фигур). Школьники часто при решении задачи не могут выбрать подходящее построение, аргументировать сделанный выбор, не осознают назначение конкретного дополнительного построения. При составлении схемы решения задачи имеется возможность наглядно это показать. Рассмотрим пример. Школьникам предлагается, заполнив пропуски, изучить схему доказательства следующей теоремы [8, с. 52].

Задание 6. Изучить схему доказательства теоремы и заполнить пропуски.

Теорема. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (рис. 6).

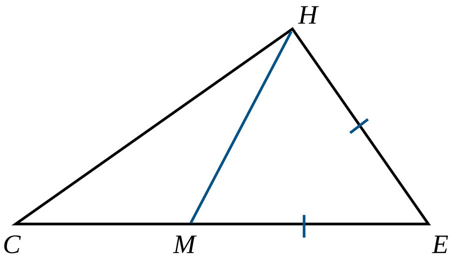

Рис. 6. Рисунок к заданию 6

На схеме (рис. 7) выделен блок, в котором описаны дополнительные построения, причем этот блок находится на одном уровне с условием, что показывает его значение в доказательстве теоремы. Стрелки позволяют проследить, какие следствия из каждого дополнительного построения получены. Обратим внимание, что на схеме использованы различные стрелки, обозначающие отдельные цепочки рассуждений. Такое оформление схемы позволяет наглядно представить структуру доказательства.

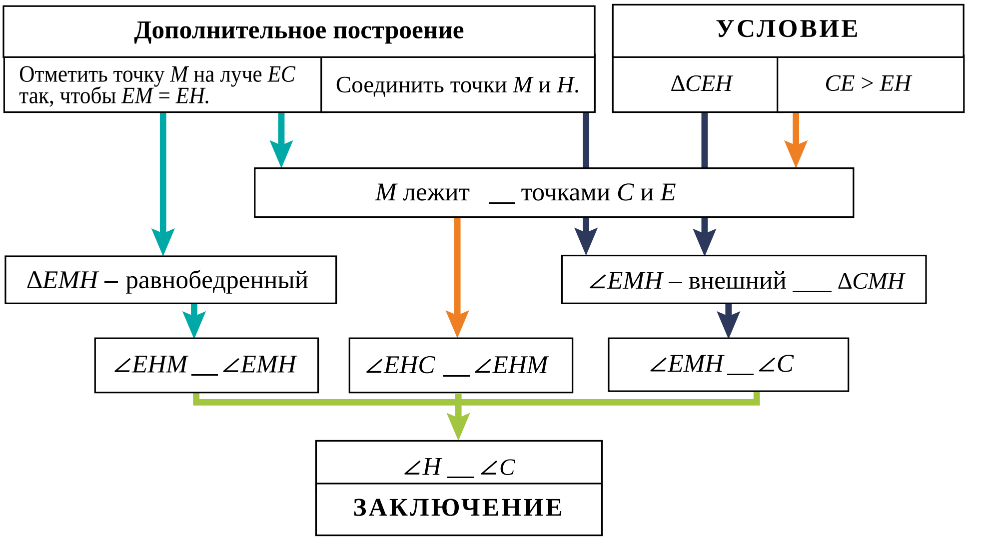

Рис. 7. Схема к заданию 6

Также в рабочую тетрадь включены задания, где на схеме требуется восстановить стрелки, обозначающие шаги доказательства, обосновать эти шаги.

Наглядные схемы могут быть использованы не только для иллюстрации доказательств, но и для представления поиска и хода решения вычислительных задач. Составление таких схем доступно и самим учащимся. Современные электронные образовательные ресурсы позволяют создавать задания, в которых реализуются различные сценарии работы со схемами. Школьники легко овладевают такими ресурсами. Поэтому для развития у них умений самостоятельности и самоорганизации возможно предложить составить наглядные схемы по готовым доказательствам или решениям; в процессе самостоятельного решения или поиска решения задачи; а также записать по таким схемам решения в виде текста. В ходе такой учебной работы школьники овладевают способностью осознавать свою деятельность по решению геометрических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Погорелов А. В.* Элементарная геометрия. М.: Наука, 1972. 208 с.
2. *Саранцев Г. И.* Обучение математическим доказательствам в школе: кн. для учителя. М.: Просвещение, 2000. 173 с.
3. *Орлов В. В.* Геометрия в задачах. 7–8 классы. Пособие для ученика и учителя / под ред. проф. Н. М. Матвеева. СПб.: НПО «Мир и семья-95»: Интерлайн, 1999. 212 с.
4. *Хабибуллин К. Я.* Применение граф-схем при решении геометрических задач как средство развития творческой деятельности учащихся: дис. канд. пед. наук. Стерлитамак, 2001. 152 с.
5. *Клековкин Г. А., Максютин А. А.* Задачный подход в обучении математике. М.: Самара: СФ ГОУ ВПО МГПУ, 2009.184 с.
6. *Имайкин В. М.* Фрагменты деятельностного содержания образования на материале математики // Математическое образование. 2004. № 4. С. 64–74.
7. *Боженкова Л. И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 205 с.
8. *Глазков Ю. А.*, *Егупова М. В.* Математика. Геометрия. Рабочая тетрадь. 7 класс. Базовый уровень. М.: Просвещение, 2023. 96 с.
9. Математика. Геометрия: 7–9 классы: базовый уровень: учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. М.: Просвещение, 2022. 415 с.

REFERENCES

1. Pogorelov A. V. *Elementarnaya geometriya.* Moscow: Nauka, 1972. 208 p.
2. Sarantsev G. I. *Obuchenie matematicheskim dokazatelstvam v shkole: kn. dlya uchitelya.* Moscow: Prosveshchenie, 2000. 173 p.
3. Orlov V. V. *Geometriya v zadachakh. 7–8 klassy. Posobie dlya uchenika i uchitelya.* Ed. by prof. N. M. Matveev. St. Petersburg: NPO „Mir i semya-95“: Interlayn, 1999. 212 p.
4. Khabibullin K. Ya. Primenenie graf-skhem pri reshenii geometricheskikh zadach kak sredstvo razvitiya tvorcheskoy deyatelnosti uchashchikhsya. *PhD dissertation (Education)*. Sterlitamak, 2001. 152 p.
5. Klekovkin G. A., Maksyutin A. A. *Zadachnyy podkhod v obuchenii matematike.* Moscow: Samara: SF GOU VPO MGPU, 2009.184 p.
6. Imaykin V. M. Fragmenty deyatelnostnogo soderzhaniya obrazovaniya na materiale matematiki. *Matematicheskoe obrazovanie.* 2004, No. 4, pp. 64–74.
7. Bozhenkova L. I. *Metodika formirovaniya universalnykh uchebnykh deystviy pri obuchenii geometrii.* Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2015. 205 p.
8. Glazkov Yu. A., Egupova M. V. *Matematika. Geometriya. Rabochaya tetrad. 7 klass. Bazovyy uroven.* Moscow: Prosveshchenie, 2023. 96 p.
9. Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomtsev S. B. et al. *Matematika. Geometriya: 7–9 klassy: bazovyy uroven: uchebnik.* Moscow: Prosveshchenie, 2022. 415 p.

Егупова Марина Викторовна, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике, Московский педагогический государственный университет

e-mail: Mv.egupova@mpgu.su

Egupova Marina V., ScD in Education, Associate Professor, Professor, Theory and Methods of Teaching Mathematics and Informatics Department, Moscow Pedagogical State University

e-mail: Mv.egupova@mpgu.su

Глазков Юрий Александрович, кандидат педагогических наук, профессор, консультант издательства «Экзамен»

e-mail: y_glaskov@mail.ru

Glazkov Yury A., PhD in Education, Full Professor, Consultant, “Ekzamen” Publishing House

e-mail: y_glaskov@mail.ru

Есина Лариса Юрьевна, аспирант, Московский педагогический государственный университет; учитель математики АНОО Школа «Алгоритм»

e-mail: laesina@gmail.com

Esina Larisa Yu., PhD postgraduate student, Moscow Pedagogical State University; mathematics teacher, “Algorithm” School

e-mail: laesina@gmail.com

Статья поступила в редакцию 05.10.2023
The article was received on 05.10.2023