УДК 372.851
ББК 74.262.21
DOI: 10.31862/1819-463X-2024-1-152-166

ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЯ РЕШАТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Т. В. Бежану, О. А. Гацук, С. Е. Пестов

Аннотация. *Статья посвящена экстремальным задачам школьного курса математики. Авторы выстраивают две отдельные линии в обсуждении заявленной темы, разделяя различные методы решения экстремальных задач на методы, реализующие алгебраический и геометрический подходы. В случае применения первых из них решение (как алгебраических, так и геометрических задач) согласуется с этапами математического моделирования. Для случая применения вторых из них в работе делается акцент на так называемом базовом приеме. С его помощью реализуется решение первых экстремальных задач геометрии, опора на него выполняется в процессе решения обсуждаемых задач с использованием других геометрических методов. Авторами выделяется последовательность действий в составе базового приема. В рамках каждой линии обсуждения характеризуется подготовительная работа, реализуемая в преддверии решения экстремальных задач различными методами.*

Ключевые слова: *экстремальные задачи, наибольшее и наименьшее значение, методы решения экстремальных задач, методика обучения математике, этапы обучения решению экстремальных задач.*

Для цитирования: *Бежану Т. В., Гацук О. А., Пестов С. Е.* Формирование умения решать экстремальные задачи в школьном курсе математики // Наука и школа. 2024. № 1. С. 152–166. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-1-152-166.

FORMATION OF THE SKILL TO SOLVE EXTREMAL PROBLEMS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

T. V. Bezhanu, O. A. Gatsuk, S. E. Pestov

Аннотация. *The article is devoted to extremal problems of the school mathematics course. The authors build two separate lines in the discussion of the stated topic, dividing various methods for solving extremal problems into methods that implement algebraic and geometric approaches. In the case of applying the first of them, the solution (of both algebraic and geometric problems) is consistent with the stages of mathematical modeling. For the case of applying the second of them, the work focuses on the so-called basic method. With its help, the solution of the first extremal problems of geometry is realized, reliance on it is carried out in the process of solving the discussed problems using other geometric methods. The authors highlight the sequence of actions as part of the basic method. Within the framework of each line of discussion, the preparatory work carried out in anticipation of solving extremal problems by various methods is characterized.*

Ключевые слова: *extremal problems, maximum and minimum, methods of solving extremal problems, methods of teaching mathematics, stages of learning to solve extremal problems.*

Cite as: Bezhanu T. V., Gatsuk O. A., Pestov S. E. Formation of the skill to solve extremal problems in the school course of mathematics. *Nauka i shkola.* 2024, No. 1, pp. 152–166. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-1-152-166.

Экстремальные задачи – это задачи на нахождение максимального или минимального значения некоторой величины, наилучшего или оптимального значения определенного показателя. Их также называют задачами на наибольшее и наименьшее значения, максимум и минимум, оптимизационными задачами. Использование различной терминологии сущности обсуждаемых в настоящей работе вопросов не меняет.

Существование экстремальных задач и методы их решения являются показательным примером необходимости математики в жизни человека. Другими словами, использование таких задач в процессе обучения усиливает практическую направленность курса математики. Имеют место и другие аргументы в пользу актуальности данного исследования. Обозначим их.

Методы решения экстремальных задач различны. В результате их освоения многообразный математический инструментарий «оказывается в руках» решающего. Это, несомненно, оказывает положительное влияние на развитие математической подготовки обучающихся, развитие их исследовательских умений [1–3].

Основным методом решения экстремальных задач считается использование производной. Элементы дифференциального исчисления являются предметом изучения в школьном курсе алгебры и начал анализа 10–11-го классов. Применение «бездифференциальных» методов к решению задач на наибольшее (наименьшее) значение можно реализовать на более ранних ступенях обучения алгебре и геометрии, например, в 7–9-м классах. Такой подход будет способствовать, в частности, более глубокому пониманию определенных разделов курса физики в 9-м классе [2].

К решению многих геометрических экстремальных задач применяются методы алгебры и начал анализа. Однако в геометрии имеют место и задачи на наибольшее (наименьшее) значение, решаемые без привлечения последних. В таком случае в решении реализуется работа с геометрическим чертежом (выполнение некоторого его преобразования путем построения различных элементов), изучение свойств фигур (данных или построенных на чертеже) и использование геометрических фактов (зачастую геометрических неравенств) для установления требуемого. Данный подход к решению экстремальных задач, на наш взгляд, оказывает положительное влияние, во-первых, на развитие умения обучающихся работать с чертежом, что является важным умением в решении любой геометрической задачи. Во-вторых, повышает успешность обучающихся в использовании геометрических неравенств для решения различных геометрических задач.

Наряду с перечисленными выше аргументами в пользу актуальности настоящего исследования можно также отнести и включение экстремальных задач в содержание ЕГЭ и ОГЭ по математике, олимпиад различного уровня.

В связи с вышесказанным вопросы, связанные с разработкой методических аспектов обучения учащихся решению экстремальных задач различными методами, достойны внимания. Следует признать, что в научно-методической литературе данные вопросы затрагиваются реже в сравнении с рассмотрением различных методов решения задач на наибольшее (наименьшее) значение. Проблема настоящего исследования – нахождение путей формирования у учащихся умения решать экстремальные задачи различными методами в школьном курсе математики.

Анализ учебной литературы (математика, 5–6-й классы, алгебра и геометрия, 7–9-й классы) показывает, что задачи на наибольшее (наименьшее) значение в учебниках практически отсутствуют (примерно 1–2% всех представленных задач). В процессе освоения школьной образовательной программы по математике внимание экстремальным задачам уделяется в курсе алгебры и начал анализа. В рамках изучения прикладного применения аппарата производной обозначаются этапы решения экстремальных задач с его помощью, а именно этапы математического моделирования [4]:

(1) Составление математической модели.
(2) Работа с моделью.
(3) Ответ на вопрос задачи.

На первом этапе выполняется составление функции одной переменной. На втором этапе средствами анализа определяется наибольшее или наименьшее значение функции на некотором промежутке. На третьем этапе выясняется практический смысл полученного на языке функций результата.

Не приводя общеизвестного алгоритма решения задач на наибольшее (наименьшее) значение с помощью производной, обратим внимание, что в процессе решения может возникать различная ситуация с количеством найденных стационарных точек, попадающих в область допустимых значений переменной. Таковых может быть несколько, одна или ни одной. В учебной литературе среди экстремальных задач, решаемых с использованием производной, превалирует ситуация с единственной стационарной точкой. При этом имеет место теорема, устанавливающая тот факт, что если единственная стационарная точка является точкой максимума (минимума), это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции [4].

В научно-методической литературе большое внимание уделяется средствам элементарной математики, которые можно применить к решению обсуждаемых в этой работе задач. Укажем их:

1) метод перебора [3];
2) метод оценки [5; 6];

3) использование свойств функций (в частности, линейной, квадратичной) [1; 5; 7; 8];
4) метод введения параметра или анализ множества значений функции [7];
5) использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим – неравенство Коши для случая двух переменных (также неравенство Коши для случая более двух переменных) [5–7; 9; 10];
6) метод геометрического преобразования плоскости [11; 12];
7) метод развертки [12; 13].

Имеют место публикации, созвучные с темой настоящей работы. Они посвящены исследованию функции одной переменной на экстремум без использования производной [2; 14–16]. Авторами обсуждаются не только методы решения, представленные списком выше, но и другие, например, использование скалярного произведения векторов, метод Ферма [14; 16], которые возможны для использования в решении задач на наибольшее (наименьшее) значение.

Среди методов решения экстремальных задач выделим методы, реализующие алгебраический и геометрический подходы. В случае применения первых из них решение обсуждаемых в работе задач согласуется с этапами математического моделирования (1)–(3). В соответствии с указанным выше списком к таковым относятся методы 1–5. На первоначальном этапе решения с их помощью выполняется составление функции (формулы, выражения) для дальнейшего исследования. В работах авторов, как правило, демонстрируются различные примеры использования данных методов для получения требуемого наибольшего (наименьшего) значения. Обсуждаются случаи (применительно к отдельным методам): найденное значение переменной оказывается внутренней точкой ее области допустимых значений (ОДЗ) и служит решением задачи либо требуемое задачи достигается в граничной точке ОДЗ [8].

В обозначенном выше списке методы 6–7 реализуют геометрический подход в решении экстремальных задач. В отдельных работах также имеет место обсуждение экстремальных задач геометрии, решаемых без их привлечения (следует сказать, что это делается в первую очередь). Речь идет о геометрическом способе решения, который предполагает вариативное изображение на чертеже искомого элемента и дальнейшее установление требуемого (наибольшего или наименьшего значения) путем построения логической цепочки умозаключений [6; 12; 17]. Задачи, которые решаются посредством выполнения такой деятельности, рассматриваются как «базовые» экстремальные задачи (они лежат в основе решения последующих геометрических задач на наибольшее (наименьшее) значение), соответствующий прием решения именуется «базовым» [17].

Методические аспекты обучения решению экстремальных задач геометрии находят отражение в работах [12; 17]. Экстремальные задачи выстраиваются в систему с разбиением «на подзадачи, посильные для самостоятельного решения учащихся» [12, с. 2], группируются по методам решения, среди которых имеют место методы, реализующие как алгебраический, так и геометрический подходы. Предварительно рассматриваются теоретические факты, с опорой на которые выполняется решение. Система экстремальных задач ориентируется на учащихся определенной ступени обучения, обладающих соответствующей математической подготовкой на момент знакомства с тем или иным методом решения.

Обучение решению экстремальных задач может быть реализовано в рамках элективного курса соответствующей тематики или занятий математического кружка [6; 11; 17]. Такая стратегия оправдывает себя возможностью для обучающихся, во-первых, освоить различные методы решения задач на наибольшее (наименьшее) значение. Во-вторых, углубить свои математические знания ввиду того, что есть экстремальные задачи, решение которых выполняется с опорой на факты, выходящие за пределы школьного курса математики. Имеет место и другой взгляд на организацию процесса обучения решению экстремальных задач – их можно (и нужно) решать (не только средствами дифференциального исчисления) в систематическом курсе алгебры и геометрии 7–11-го классов [1; 6; 10]. Аргументы в пользу данного аспекта обозначены в начале настоящей работы. Очевидно, что в такой ситуации «гнаться» за освоением большинства различных методов решения экстремальных задач не имеет смысла, тем более что массовому школьнику они и не нужны в полном объеме. Но познакомить учащихся с некоторыми из них целесообразно.

В рамках настоящего исследования методы и аспекты формирования умения применять их в решении экстремальных задач рассматриваются двумя отдельными линиями (разделение методов авторы уже произвели ранее). В такой ситуации обучение учащихся решать задачи (как алгебраические, так и геометрические) на наибольшее (наименьшее) значение с использованием первых из обсуждаемых методов организуется единообразно в соответствии с этапами математического моделирования (1)–(3).

В части работы, посвященной геометрическим методам решения экстремальных задач, акцент делается на базовом приеме. С его помощью реализуется решение первых экстремальных задач геометрии, опора на него выполняется в процессе решения задач с использованием других геометрических методов. Авторами выделяются действия в составе базового приема (в научно-методической литературе этот аспект не обсуждается), что способствует организации целесообразной подготовительной работы в процессе обучения решению экстремальных задач геометрии.

Выполним иллюстрацию отдельных методов решения задач на наибольшее или наименьшее значение.

Рассмотрим примеры задач, в решении которых реализуется алгебраический подход.

Задача 1. Поперечным сечением канала является прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AB + BC + CD = P$ (м). Каким нужно сделать ширину и глубину канала, чтобы площадь его поперечного сечения оказалась наибольшей?

Решение.

Составим функцию одной переменной. Пусть $AB = CD = x$, тогда $BC = P - 2x$.

Следовательно, $S = x(P - 2x)$, где $x \in \left[0; \dfrac{P}{2}\right]$.

Способ 1. Использование свойств функций.

$S(x) = -2x^2 + Px$ – квадратичная функция, ее старший коэффициент отрицательный. Значит, данная функция достигает своего наибольшего значения в вершине параболы:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{P}{4} \in \left[0; \frac{P}{2}\right].$$

Способ 2. Метод введения параметра.

$S(x) = -2x^2 + Px$. Рассмотрим уравнение, в котором переменную S будем принимать за параметр: $-2x^2 + Px - S = 0$. Решим данное квадратное уравнение с параметром: $D = P^2 - 8S \geq 0 \Rightarrow S \leq \frac{P^2}{8}$. Наибольшая площадь равна: $S = \frac{P^2}{8}$.

Тогда $x(P-2x) = \frac{P^2}{8}$, откуда $x = \frac{P}{4} \in \left[0; \frac{P}{2}\right]$.

Способ 3. Использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

$S(x) = x(P-2x)$ или $S(x) = 2x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right)$. Применим неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$,

преобразовав его к виду: $a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Тогда: $2x \cdot \left(\frac{P}{2} - x\right) \leq 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{P}{2} - x}{2}\right)^2$.

То есть $S \leq \frac{P^2}{8}$. Известно, что среднее геометрическое равно среднему арифметическому тогда и только тогда, когда они составлены из равных величин. Тогда $S_{наиб.} = \frac{P^2}{8}$ в случае $x = P - 2x$, откуда $x = \frac{P}{4} \in \left[0; \frac{P}{2}\right]$.

Следовательно, $AB = \frac{P}{4}, BC = \frac{P}{2}$.

Сделаем комментарий к представленным решениям задачи 1.

В первом способе для установления требуемого используются свойства квадратичной функции. В случае монотонной функции на всем промежутке ОДЗ переменной наибольшее и наименьшее значения устанавливаются на его концах.

Во втором способе функция $y = f(x)$ рассматривается как уравнение с неизвестным x и параметром $y = p$ и решается задача – при каких значениях параметра p уравнение имеет решение.

Используемое в третьем способе неравенство (неравенство Коши для случая двух переменных) в школьном курсе математики является предметом изучения [18; 19]. Имеют место разные варианты его записи, которые иногда оказываются более удобными в применении для решения задачи. Например, $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Переход к ним несложно осуществить некоторыми алгебраическими преобразованиями.

Использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, метода введения параметра для установления наибольшего (наименьшего) значения некоторой величины созвучны с методом оценки, иллюстрируемым в следующем примере.

Задача 2. Из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность радиусом R, найдите четырехугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь?

Решение.

(1) Площадь выпуклого четырехугольника можно определить по формуле: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$, где α – угол между диагоналями d_1, d_2.

(2) Наибольшими диагоналями четырехугольника, вписанного в окружность, являются диаметры этой окружности. Синус угла между диагоналями принимает наибольшее значение, равное 1, если эти диагонали перпендикулярны.

(3) Следовательно, искомым четырехугольником является квадрат. Его площадь равна $2R^2$.

Обсудим методические аспекты обучения решению экстремальных задач методами, реализующими алгебраический подход. Для успешного решения обучающийся должен уметь:

1) составлять функцию одной переменной,
2) оперировать тем или иным методом исследования этой функции на наибольшее (наименьшее) значение.

Каждое из указанных выше умений является предметом специального формирования в рамках подготовительной работы. Другими словами, обучающийся учится выполнять этапы математического моделирования (применительно к решению экстремальных задач в будущем) изолированно, что согласуется с положениями общей методики обучения математике.

Для формирования первого из указанных умений в школьных учебниках математики имеют место задачи на составление выражения, уравнения для ее решения. Например, «Составьте выражение по условию задачи: Из 6 книжных полок составлен шкаф. Высота каждой полки x см. Найдите высоту шкафа. Найдите значение выражения при x = 28; 33» [20, с. 86]. Или обратные им – по данному выражению, уравнению необходимо придумать условие задачи. В методике обучения решению задач с помощью уравнений такие упражнения (и аналогичные им) направлены на формирование соответствующего умения – умения составлять уравнение по условию задачи. Они же вносят свой вклад в реализацию подготовительной работы в обучении решению экстремальных задач с использованием методов алгебраического подхода.

К подготовительным задачам отнесем и следующие задачи на составление функции одной переменной. Они получены из формулировок соответствующих экстремальных задач путем изменения требования. Продемонстрируем примеры.

Экстремальные задачи:

1. Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.
2. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 20 см. Найдите длины катетов этого треугольника, при которых площадь треугольника будет наибольшей.

Соответствующие формулировки подготовительных задач:

1. Разность двух чисел равна 98. Составьте функцию одной переменной для определения их произведения. Укажите область допустимых значений переменной.
2. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 20 см. Составьте функцию одной переменной для определения площади данного треугольника. Укажите область допустимых значений переменной.

После изучения соответствующих математических фактов формированию оперировать тем или иным методом исследования функции на наибольшее (наименьшее) значение служат задачи, которые имеют место в учебной и научно-методической литературе:

1. Какое наибольшее значение может иметь многочлен $2x - x^2$?
2. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x \cdot (5 - x)$ на отрезке [3; 6].
3. Какое наименьшее значение может иметь выражение при положительных значениях переменной x?
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции и т. д.

В решении представленных задач можно использовать такие средства элементарной математики, как использование свойств функции, метод введения параметра, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, метод оценки (не имеем в виду одновременное использование указанных методов к каждой из них). Целесообразно в задачах (при решении отдельными методами) варьировать ситуацию количества найденных значений переменной из ее ОДЗ. Например, в представленной второй задаче значение переменной – абсцисса вершины параболы, в которой наблюдается наибольшее значение заданной квадратичной функции (если говорить об использовании свойств этой функции в решении), не принадлежит указанной области допустимых значений переменной. Требуемое задачи достигается в граничной точке ($x = 3$).

После проведения подготовительной работы реализуется решение экстремальных задач с использованием изученного метода. По мере знакомства с новыми методами решения обсуждаемых задач акцент в реализации подготовительной работы смещается в сторону формирования умения оперировать тем или иным методом исследования функции на наибольшее (наименьшее) значение. Это обусловлено тем, что в процессе решения экстремальных задач умение составлять функцию для исследования на наибольшее (наименьшее) значение постепенно совершенствуется.

Обратимся к обсуждению геометрических способов решения экстремальных задач. Сначала рассмотрим примеры, иллюстрирующие метод развертки и метод геометрического преобразования плоскости.

Задача 3. Найдите путь наименьшей длины по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины A в вершину C_1 (рис. 1а).

Решение.

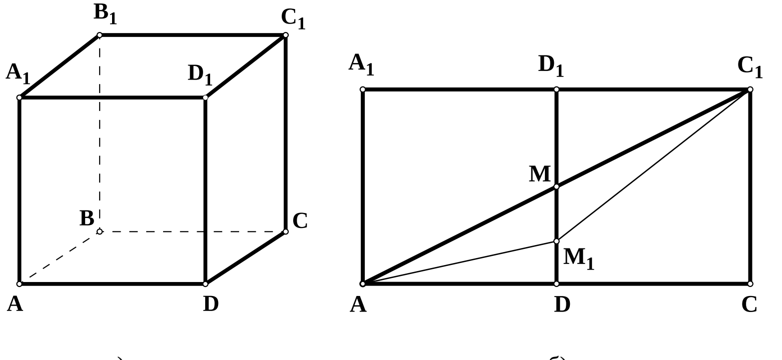

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 3

Рассмотрим развертку двух граней куба (рис. 1б). Наименьшая длина достигается, если путь представляет собой отрезок, соединяющий точки A и C_1. Данный факт устанавливается путем построения на ребре DD_1 точки M_1, отличной от M, и применения неравенства треугольника для треугольника AM_1C_1. Решение завершается простыми вычислениями. При этом найденный кратчайший путь не единственен, их шесть (пересекающие ребра DD_1, BB_1, A_1D_1, BC, A_1B_1 и CD).

Задача 4. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от нее по одну сторону. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний AC и CB наименьшая (задача Герона).

Решение.

Выполним построение точки B_1, симметричной точке B относительно прямой c (рис. 2). Пусть точка C – точка пересечения прямой c и отрезка AB_1, C_1 – произвольная точка той же прямой. Согласно свойствам фигур, построенных на чертеже, для получения окончательного вывода в решении задачи сравнению подлежат суммы отрезков $AC + CB_1$ и $AC_1 + C_1B_1$. Требуемое устанавливается с помощью неравенства треугольника для треугольника AB_1C_1.

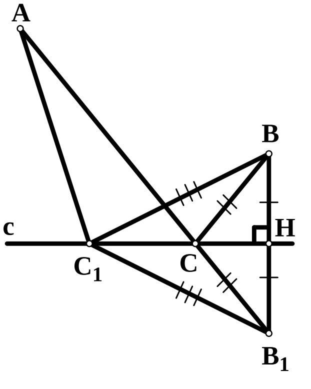

Рис. 2. Иллюстрация к задаче 4

Сделаем комментарий к представленным решениям задач 3 и 4.

Во-первых, механизм решения экстремальных задач посредством данных методов схожий – в результате преобразования (построения развертки, применения осевой симметрии) исходная фигура заменяется на новую. К слову сказать, метод развертки иногда отождествляют с методом геометрического преобразования плоскости. В частности, в задаче 3 вместо построения развертки куба (двух его смежных граней) можно говорить о повороте одной из граней на 90 градусов [5; 13].

Во-вторых, получению окончательного ответа служит исследование, которое проводится на преобразованном чертеже путем построения искомого элемента различным образом, и доказательство требуемого с использованием геометрических фактов. Другими словами, решение реализуется с помощью базового приема, обозначенного в начале работы.

Обратимся к его обсуждению и предложим последовательность действий, конкретизирующую деятельность по решению экстремальной задачи с использованием базового приема. С этой целью рассмотрим ряд примеров.

Задача 5. Дана прямая c и две точки A и B, расположенные от нее по разные стороны. На этой прямой найдите такую точку C, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая.

Решение.

(1) Представим на чертеже различные случаи построения искомого элемента (рис. 3): точка C является точкой пересечения отрезка AB и прямой c (отрезки AC и CB образуют прямую), точка C_1 любая другая точка прямой c, отличная от C (отрезки AC_1 и C_1B образуют ломаную).

(2) Докажем, что сумма отрезков AC и CB будет наименьшей.

(3) Доказательство данного факта устанавливается согласно неравенству треугольника ABC_1. Точка пересечения прямой AB с данной прямой c – искомая.

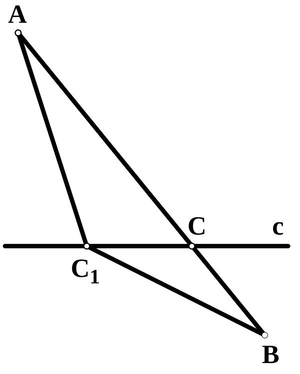

Рис. 3. Иллюстрация к задаче 5

Задача 6. Из всех треугольников ABC с данной стороной $AB = c$ найдите треугольник с наименьшим радиусом R описанной окружности.

Решение.

(1) Исследуем задачную ситуацию на различных треугольниках – прямоугольном, остроугольном и тупоугольном. Данные три случая возникают в процессе изучения взаимного расположения стороны *AB* треугольника и центра описанной окружности (рис. 4а, 4б, 4в). Построим радиусы окружности.

(2) Докажем, что требуемым треугольником является прямоугольный.

(3) В случае прямоугольного треугольника. В других случаях согласно неравенству треугольника AOB имеем: $AO + OB > AB$, то есть. Следовательно, прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$ – искомый.

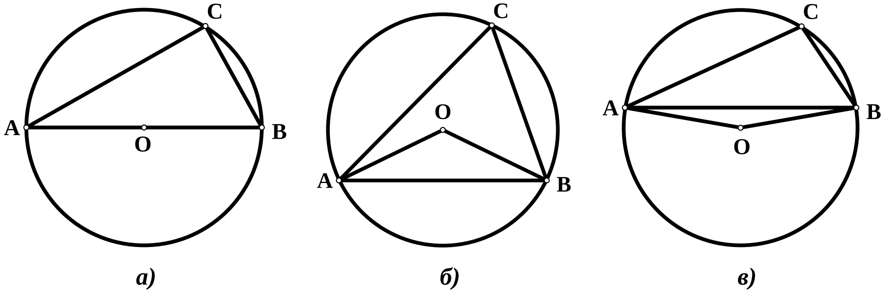

Рис. 4. Иллюстрация к задаче 6

Задача 7. Дан угол XOY. На одной стороне угла отмечены точки A и B. Найдите на другой стороне угла такую точку C, из которой данный отрезок AB виден под наибольшим углом, то есть угол ACB наибольший.

Решение.

(1) Выполним построение окружности, проходящей через точки A и B. В зависимости от радиуса выстраиваемая окружность может не пересекать вторую сторону угла (этот случай не представляет интереса), может касаться второй стороны угла в единственной точке или пересекать ее в двух точках (рис. 5).

(2) Докажем, что искомый угол получается в случае касания окружности и второй стороны угла XOY.

(3) Вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB. Для той же окружности угол AC_2B измеряется полуразностью дуг AB и A_2B_2 (аналогично угол AC_1B). Значит, угол ACB – наибольший, искомая точка C – точка касания окружности, проходящей через точки A и B, и второй стороны угла XOY.

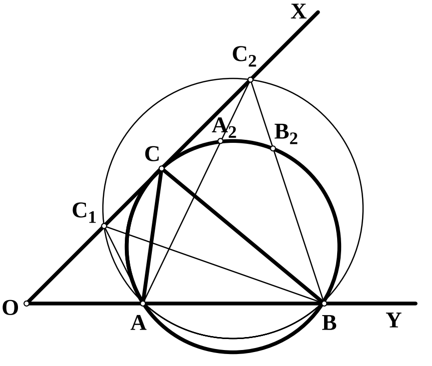

Рис. 5. Иллюстрация к задаче 7

Заметим, что решить такую задачу помогает знание определенного геометрического места точек (ГМТ): множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть дуга окружности. Идея его применения приводит к реализации построений на чертеже.

Проанализируем решения задач 5–7. На первом шаге реализуются различные построения искомого элемента посредством исследования взаимного его расположения и данных элементов. Исполнение возможно либо на одном геометрическом чертеже, либо на разных.

На втором шаге высказывается предположение, что является оптимальным значением исследуемой величины. Это можно сделать либо с опорой на визуальную оценку чертежа, либо буквальным измерением искомого элемента. Например, в задаче 5 «видно невооруженным глазом», что есть наименьшее искомое расстояние. В задачах 6 и 7 визуальная оценка элементов чертежа, возможно, не окажет посильной помощи. В таком случае исследуемые элементы можно измерить (линейкой, транспортиром). Выполнение такой деятельности помогает понять, что именно подлежит строгому логическому доказательству. Следует сказать, что второй шаг абсолютно созвучен с этапом открытия формулировки теоремы в общей методике обучения математике.

На третьем шаге реализуется доказательство высказанного предположения, что приводит к установлению требуемого задачи.

На основании вышеизложенного представим последовательность действий в составе базового приема решения геометрических экстремальных задач:

(1) выполнить построения искомого элемента, исследуя различные случаи взаимного его расположения и данных элементов;

(2) высказать гипотезу о наибольшем (наименьшем) значении исследуемой величины;

(3) доказать гипотезу.

Вернемся к решениям задач 3 и 4. Предполагая, что установлено решение задачи 5, выполнение различных построений искомого элемента после применения метода развертки, метода геометрического преобразования плоскости и высказывание гипотезы о наименьшем расстоянии между точками A и C_1 остаются как бы «за кадром», но незримо, конечно же, присутствуют.

Сделаем еще один комментарий к задаче 4. Ее решение иногда называют методом Герона [13], который находит применение в решении других экстремальных задач геометрии. Идея использования данного метода может быть продиктована необходимостью установления в задаче наименьшего значения суммы некоторых отрезков. При этом метод Герона выступает доказательной частью решения экстремальной задачи.

Обсудим методические аспекты обучения решению геометрических экстремальных задач с использованием базового приема. Для успешного решения обучающийся должен:

1) уметь анализировать задачную ситуацию на предмет различных вариантов построения искомого элемента;
2) знать и уметь применять различные геометрические факты, методы решения геометрических задач для установления требуемого.

Для формирования указанных умений в методике обучения геометрии накоплен богатый опыт, согласно которому в образовательном процессе соответствующая систематическая работа реализуется (должна реализовываться). Речь идет о целенаправленном формировании у обучающихся умения работать с геометрическим чертежом (строить, читать и преобразовывать), обучении их самостоятельному поиску решения задачи (построение логической цепочки умозаключений с опорой на изученные геометрические факты). Другими словами, в преддверии решения геометрических экстремальных задач подготовка учащихся должна быть направлена на развитие до необходимого уровня их геометрических знаний и умений. В противном случае об эффективном формировании умения решать обсуждаемые задачи не приходится говорить.

В реализацию подготовительной работы свой вклад вносят задачи на построение. В рамках их решений обучающиеся учатся проводить анализ и исследование задачной ситуации для построения искомого элемента. Исследовательская деятельность выполняется обучающимися и в решении так называемых вариативных задач (формулировка которых приводит к неоднозначному построению чертежа, то есть разным его вариантам). Такие задачи в учебной литературе имеют место, начиная с первых разделов курса геометрии основной школы.

Обсуждение последовательности действий базового приема реализуется с обучающимися после решения первых экстремальных задач с его использованием. В решении последующих геометрических задач на наибольшее (наименьшее) значение выполняется опора на нее.

Дальнейший процесс освоения геометрических методов решения экстремальных задач (например, метод развертки, метод геометрического преобразования) предваряется, естественно, изучением соответствующих геометрических фактов, решением задач на построение различных разверток пространственных фигур, выполнение геометрического преобразования плоскости (с использованием, например, центральной, осевой симметрий, поворота на некоторый угол). В рамках настоящей работы не уделяем внимание данному направлению. На наш взгляд, это предмет отдельного исследования.

В завершение отметим, что в научно-методической литературе имеют место исследования, посвященные вопросам обучения различным методам решения экстремальных задач студентов – будущих учителей математики [1; 3; 11; 21]. В рамках настоящей работы были составлены наборы экстремальных задач, решаемые различными методами. Апробация материала выполнялась в процессе освоения дисциплины «Экстремальные задачи в школьном курсе математики» учебного плана подготовки студентов направления «Педагогическое образование» (профили «Математика и информатика»). Для более эффективного освоения указанной дисциплины авторами разработано дистанционное ее сопровождение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бодряков В. Ю., Быков А. А., Ударцева Д. А.* Квадратичная функция как мотивирующий инструмент решения экстремальных задач // Педагогическое образование в России. 2018. № 8. С. 55–63.
2. *Крачковский С. М.* Вариативность подходов к задачам на экстремальные значения // Математика в школе. 2018. № 1. С. 19–32.
3. *Овчинникова М. В.* Экстремальные геометрические задачи в личностно-ориентированной подготовке будущих учителей математики (метод перебора) // Проблемы современного педагогического образования. 2015. № 48–1. С. 186–194.
4. *Мордкович А. Г., Семенов П. В.* Алгебра и начала математического анализа. 10: учебник для общеобразоват. организаций (базовый и углубленный уровни): в 2 ч. Ч. 1. М.: Мнемозина, 2020. 457 с.
5. *Дроздов В. Б.* Экстремальные геометрические задачи // Математическое образование. 2008. № 3 (47). С. 39–49.
6. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Экстремальные задачи по геометрии. 9 класс // Математика в школе. 2022. № 4. С. 39–48.
7. *Беляева Э. С., Монахов В. М.* Экстремальные задачи. Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1977. 64 с.
8. *Буфеев С. В., Шведова И. Г.* Ищем решение на границе // Математика в школе. 2013. № 6. С. 16–18.
9. *Сагателова Л. С.* Приложение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом к задачам на «экстремумы» в геометрии // Математика в школе. 2009. № 10. С. 25–32.
10. *Сорокин Г. А.* О неравенстве Коши и задачах прикладного характера // Математика в школе. 2000. № 8. С. 43–45.
11. *Овчинникова М. В.* Особенности применения метода преобразования плоскости в решении экстремальных геометрических задач в практике профессиональной подготовки будущих учителей математики // Проблемы современного педагогического образования. 2018. № 59–1. С. 266–269.
12. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Экстремальные задачи по геометрии. М.: Чистые пруды, 2007. 32 с.
13. *Мартынова С. Е.* Метод развертки при решении стереометрических задач на наименьший периметр // Математика в школе. 2009. № 8. С. 31–39.
14. *Епифанова Т. Н.* Отыскание экстремальных значений функций различными способами // Математика в школе. 2004. № 4. С. 52–54.
15. *Дворянинов С. В.* О графиках сложных дробно-квадратичных функций // Математика в школе. 2018. № 1. С. 33–38.
16. *Лузин А. Н.* Экстремумы функции в элементарной математике и алгоритм Ферма // Математика в школе. 2014. № 8. С. 38–41.
17. *Блинков А. Д., Филипповский Г. Б.* Геометрические задачи на экстремумы. М.: МЦНМО, 2022. 176 с. (Сер.: «Школьные математические кружки»).
18. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразоват. организаций. М.: Вентана-Граф, 2014. 304 с.
19. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений. М.: Дрофа, 2012. 462 с.
20. Математика. 5 класс: учебник для общеобразовательных организаций: в 2 ч. Ч. 1 / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. М.: Мнемозина, 2019. 167 с.
21. *Тимошенко Т. А., Коростелева Д. В.* Курс по выбору «Решение экстремальных задач геометрии» как средство повышения качества математической подготовки студентов // Ученые заметки ТОГУ. 2016. № 4–1. С. 554–559.

REFERENCES

1. Bodryakov V. Yu., Bykov A. A., Udartseva D. A. Kvadratichnaya funktsiya kak motiviruyushchiy instrument resheniya ekstremalnykh zadach. *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii.* 2018, No. 8, pp. 55–63.
2. Krachkovskiy S. M. Variativnost podkhodov k zadacham na ekstremalnye znacheniya. *Matematika v shkole.* 2018, No. 1, pp. 19–32.
3. Ovchinnikova M. V. Ekstremalnye geometricheskie zadachi v lichnostno-orientirovannoy podgotovke budushchikh uchiteley matematiki (metod perebora). *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya.* 2015, No. 48–1, pp. 186–194.
4. Mordkovich A. G., Semenov P. V. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10: uchebnik dlya obshcheobrazovat. organizatsiy (bazovyy i uglublennyy urovni).* In 2 parts. Part 1. Moscow: Mnemozina, 2020. 457 p.
5. Drozdov V. B. Ekstremalnye geometricheskie zadachi. *Matematicheskoe obrazovanie.* 2008, No. 3 (47), pp. 39–49.
6. Smirnov V. A., Smirnova I. M. Ekstremalnye zadachi po geometrii. 9 klass. *Matematika v shkole.* 2022, No. 4, pp. 39–48.
7. Belyaeva E. S., Monakhov V. M. *Ekstremalnye zadachi. Posobie dlya uchashchikhsya.* Moscow: Prosveshchenie, 1977. 64 p.
8. Bufeev S. V., Shvedova I. G. Ishchem reshenie na granitse. *Matematika v shkole.* 2013, No. 6, pp. 16–18.
9. Sagatelova L. S. Prilozhenie teoremy o srednem arifmeticheskom i srednem geometricheskom k zadacham na “ekstremumy” v geometrii. *Matematika v shkole.* 2009, No. 10, pp. 25–32.
10. Sorokin G. A. O neravenstve Koshi i zadachakh prikladnogo kharaktera. *Matematika v shkole.* 2000, No. 8, pp. 43–45.
11. Ovchinnikova M. V. Osobennosti primeneniya metoda preobrazovaniya ploskosti v reshenii ekstremalnykh geometricheskikh zadach v praktike professionalnoy podgotovki budushchikh uchiteley matematiki. *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya.* 2018, No. 59–1, pp. 266–269.
12. Smirnova I. M., Smirnov V. A. *Ekstremalnye zadachi po geometrii.* Moscow: Chistye prudy, 2007. 32 p.
13. Martynova S. E. Metod razvertki pri reshenii stereometricheskikh zadach na naimenshiy perimetr. *Matematika v shkole.* 2009, No. 8, pp. 31–39.
14. Epifanova T. N. Otyskanie ekstremalnykh znacheniy funktsiy razlichnymi sposobami. *Matematika v shkole.* 2004, No. 4, pp. 52–54.
15. Dvoryaninov S. V. O grafikakh slozhnykh drobno-kvadratichnykh funktsiy. *Matematika v shkole.* 2018, No. 1, pp. 33–38.
16. Luzin A. N. Ekstremumy funktsii v elementarnoy matematike i algoritm Ferma. *Matematika v shkole.* 2014, No. 8, pp. 38–41.
17. Blinkov A. D., Filippovskiy G. B. *Geometricheskie zadachi na ekstremumy.* Moscow: MTsNMO, 2022. 176 p. (Ser.: “Shkolnye matematicheskie kruzhki”).
18. Merzlyak A. G., Polonskiy V. B., Yakir M. S. *Algebra: 9 klass: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovat. organizatsiy.* Moscow: Ventana-Graf, 2014. 304 p.
19. Sharygin I. F. *Geometriya. 7–9 klassy: uchebnik dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy.* Moscow: Drofa, 2012. 462 p.
20. Vilenkin N. Ya., Zhokhov V. I., Chesnokov A. S., Shvartsburd S. I. *Matematika. 5 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatelnykh organizatsiy.* In 2 parts. Part 1. Moscow: Mnemozina, 2019. 167 p.
21. Timoshenko T. A., Korosteleva D. V. Kurs po vyboru “Reshenie ekstremalnykh zadach geometrii” kak sredstvo povysheniya kachestva matematicheskoy podgotovki studentov. *Uchenye zametki TOGU.* 2016, No. 4–1, pp. 554–559.

Бежану Татьяна Вячеславовна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики обучения математике и информационно-коммуникационным технологиям в образовании, Петрозаводский государственный университет
e-mail: bezhanu@petrsu.ru

Bezhanu Tatyana V., PhD in Education, Associate Professor, Assistant Professor, Theory and Methods of Teaching Mathematics and ICT in Education Department, Petrozavodsk State University
e-mail: bezhanu@petrsu.ru

Гацук Олег Александрович, студент, Петрозаводский государственный университет
e-mail: 9646868732@mail.ru

Gatsuk Oleg A., Student, Petrozavodsk State University
e-mail: 9646868732@mail.ru

Пестов Сергей Евгеньевич, студент, Петрозаводский государственный университет
e-mail: mckeun@yandex.ru

Pestov Sergey E., Student, Petrozavodsk State University
e-mail: mckeun@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 14.05.2023
The article was received on 14.05.2023