УДК 372.851
ББК 74.262.21

DOI: 10.31862/1819-463X-2022-2-152-160

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ» КАК СПОСОБ ПЕРЕХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Д. А. Кириллова

Аннотация. *В современном мире цифровые инструменты стали неотъемлемой частью процесса обучения. Сегодня для каждой темы любой дисциплины можно подобрать программный продукт, помогающий ученику в ее освоении, а, учителю – в объяснении соответствующего материала. Задачи с параметром относятся к наиболее сложному классу задач школьной математики, причем сложность относится и к пониманию сути задач, и к методам их решения. В статье описан один из методических приемов использования GeoGebra при изучении темы «Уравнение окружности» с целью дальнейшего обучения учеников решению систем уравнений с параметром на комбинации окружностей. Выбор автором пакета GeoGebra обоснован интуитивной понятностью и наличием русифицированного интерфейса, а также отсутствием необходимости установки программы на персональный компьютер. Предложенная в статье методическая разработка была апробирована в рамках реализации дополнительной образовательной программы для школьников «Школа МИФ: математика, информатика, физика» организованной на базе Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема.*

Ключевые слова: *GeoGebra, методика обучения математике, уравнение окружности, задача с параметром, система уравнений.*

Для цитирования: *Кириллова Д. А.* Применение среды GeoGebra при изучении темы «Уравнение окружности» как способ перехода к решению задач с параметром // Наука и школа. 2022. № 2. С. 152–160. DOI: 10.31862/1819-463X-2022-2-152-160.

THE USE OF THE GEOGEBRA SOFTWARE ENVIRONMENT WHEN STUDYING THE TOPIC „EQUATION OF A CIRCLE" AS A WAY TO START SOLVING PROBLEMS WITH A PARAMETER

D. A. Kirillova

Abstract. *In today's world, digital tools have become an integral part of the learning process. Today, for each topic you can choose a software programme that helps the learner to master it, and, for the teacher, to explain the teaching material. Problems with a parameter belong to the most difficult class of problems in school mathematics, moreover, the complexity refers both to the understanding of the essence of the problems, and to the methods of solving them. The article describes one of the methodological techniques for using GeoGebra when studying the topic „Equation of a circle" with the aim of further teaching learners to solve systems of equations with a parameter on a combination of circles. The author chose the GeoGebra program because it has an intuitive interface and is translated into Russian and there is no need to install it on a personal computer. The methodological development proposed in the article was tested in the framework of the implementation of an additional educational program for schoolchildren „School MCP: Mathematics, Computer science, Physics" organized on the basis of the Sholom-Aleichem Priamursky State University.*

Keywords: *GeoGebra, methodology of teaching mathematics, equation of a circle, problem with a parameter, system of equations.*

Cite as: Kirillova D. A. The use of the GeoGebra software environment when studying the topic „Equation of a circle" as a way to start solving problems with a parameter. *Nauka i shkola.* 2022, No. 2, pp. 152–160. DOI: 10.31862/1819-463X-2022-2-152-160.

В последнее десятилетие цифровые инструменты стали неотъемлемой частью процесса обучения. 2020 г. показал, что использование информационных технологий является жизненно необходимым навыком педагога на каждом уровне и направлении образования. В то же время разнообразие педагогических и методических задач, которые должен решать педагог, не уступает существующему на данный момент многообразию программных продуктов. В настоящее время для каждой темы любой дисциплины можно подобрать цифровой инструмент, который поможет ученику в ее освоении, а учителю – в объяснении соответствующего материала.

Одна из трудных методических задач педагога – обучение учеников различным способам решения задач с параметром. Вопросы о том, как лучше подвести учеников к пониманию понятия «параметр», как научить решать задачи различных типов с параметром, как объяснить суть разных методов решения таких задач, остаются очень популярными в методической и научной литературе [1–6].

Появление доступных и понятных программ, позволяющих графически иллюстрировать динамику изменения значения параметра в задаче, дает возможность наглядно демонстрировать суть параметра в задаче, а также объяснять методы решения, связанные с построением геометрических и графических образов уравнений, неравенств и их систем с параметром. Одним из таких ресурсов является среда GeoGebra, в статье приводится пример того, каким образом этот ресурс можно использовать при изучении темы «Уравнение окружности» с целью дальнейшего обучения учеников решению систем уравнений с параметром на комбинации окружностей.

GeoGebra – это пакет программного обеспечения с открытым исходным кодом, объединяющий геометрию, алгебру, электронные таблицы, графики, статистику и вычисления, который позволяет одновременно исследовать алгебраические и геометрические объекты в их динамике. Интуитивная понятность и наличие русифицированного интерфейса, отсутствие необходимости установки на персональный компьютер и реализация множества мощных функций делают GeoGebra очень удобным цифровым инструментом при обучении математике на всех уровнях образования [7]. В современных условиях удобство GeoGebra также заключается в том, что его можно использовать как в формате очного обучения, так и в режиме дистанционной работы.

Востребованность GeoGebra учителями и методистами подтверждается множеством публикаций с описанием примеров применения этого пакета программ при изучении различных тем математики, например, при обучении решению задач с параметром [8–10]. Компьютерной анимации в среде GeoGebra при изучении различных разделов математики, в том числе и в высшей школе, посвящен ряд работ С. В. Ларина. Его учебное пособие содержит подробное описание возможностей динамических инструментов GeoGebra в алгебре, математическом анализе; в том числе при вычерчивании графиков функций, решении задач с параметрами, изучении тригонометрии [11].

Одна из основных трудностей при обучении решению задач с параметром - объяснить ученикам, в чем заключается отличие параметра от переменной. При изучении уравнения окружности использование простейших инструментов среды GeoGebra позволяет доступно объяснить роль параметра в задачах, а также плавно подвести учащихся к одному из геометрических подходов решения систем уравнений с параметром. Следует отметить, что прежде чем приступать к объяснению описанного задания, необходимо достичь понимания учениками роли всех компонент общего уравнения окружности, навыка построения окружности по его уравнению в декартовой системе координат на плоскости. Также подразумевается предварительное знакомство учеников с языком набора формул в GeoGebra.

Первое предлагаемое задание разбито на три этапа (табл. 1). Подготовительный этап, по сути, представляет собой работу по актуализации знаний об уравнении окружности, наборе формул в GeoGebra. На этапе продвижения в уравнение окружности вводятся параметры, одновременное исследование на экране алгебраической формулы и ее геометрического образа позволяет наглядно продемонстрировать роль параметра в уравнении. Основное задание призвано сформировать понимание того, что один и тот же параметр может присутствовать в разных формулах и по-разному влиять на вид геометрического образа и на взаимное расположение окружностей относительно друг друга.

Следует отметить, что на мысль о создании описанного задания с мордочкой медвежонка автора натолкнула статья [8], в которой описана работа в GeoGebra над решением задачи: «При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4 \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?»

Перейти к исследованию систем уравнений с параметром на взаимное расположение окружностей можно с помощью следующей системы заданий.

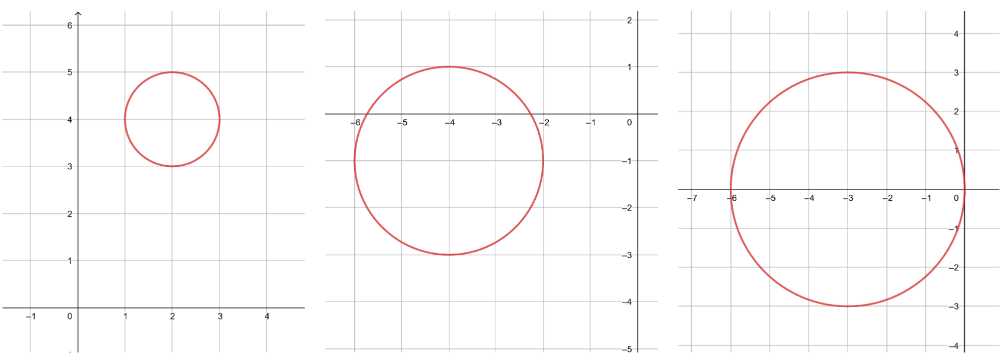
Задание 1. Каким соотношением должны быть связаны значения параметров a и b, чтобы уши только касались головы?

Таблица 1

План работы

	Подготовительный этап
1	Построить окружность, заданную уравнением $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. Сначала окружность строится в тетради, а потом в графическом калькуляторе GeoGebra
2	Построить окружность, заданную уравнением $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ в тетради и в графическом калькуляторе GeoGebra
3	Сравнить два уравнения и расположение окружностей. Описать обе окружности одним уравнением.
4	Построить окружность, заданную уравнением $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ в графическом калькуляторе GeoGebra
5	Обсудить, как числа в уравнении влияют на расположение и вид окружности в системе координат
	Продвижение
1	Заменить одно из чисел в формуле буквой, автоматически созданный бегунок попробовать двигать и изменять диапазон значений буквы: $(x-a)^2+(y-1)^2=1,$ $(x-1)^2+(y-a)^2=1,$ $(x-1)^2+(y-1)^2=a^2$
2	Записать уравнение окружности в общем виде $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,$ создать бегунок на каждый параметр. Двигая бегунки, получить окружности, изображенные на рис. 1
	Основное задание
1	Перейдя по ссылке https://www.geogebra.org/graphing/nngpfhms, исследовать предложенные уравнения с параметрами. Подобрать значения параметров так, чтобы получилась мордочка медвежонка. (Примерное изображение приведено на рис. 2)
2	Отдельно исследовать уравнение, которое задает улыбку медвежонка – полуокружность
3*	Самостоятельно дорисовать брови медвежонка в виде двух полуокружностей над глазами

Задание 3 является исследовательским и может быть развито в отдельный проект по созданию медвежонка целиком, возможно, с привлечением других линий.*



а) окружность 1 б) окружность 2 в) окружность 3

Рис. 1. Окружности для самостоятельного построения

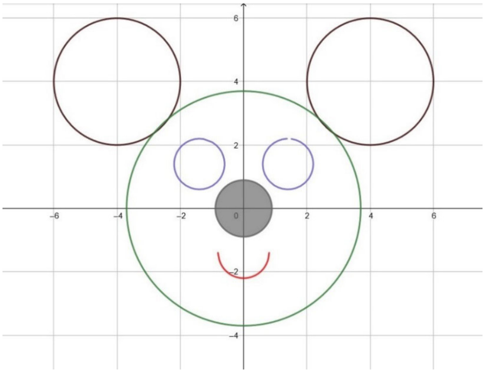


Рис. 2. Возможный вид мордочки медвежонка

Задание 2. Каким соотношением должны быть связаны значения параметров c и d, чтобы два глаза коснулись друг друга?

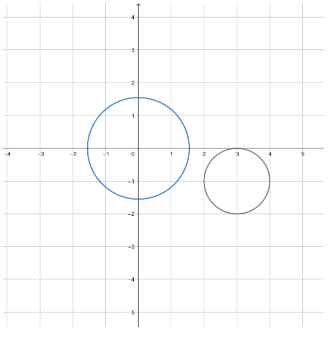
Задание 3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

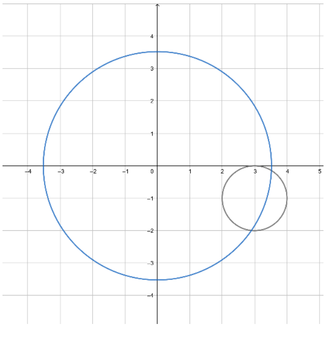
имеет единственное решение?

Перед началом решения третьего задания полезно:

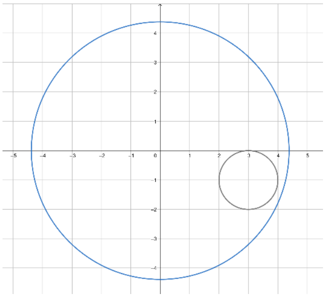
- в GeoGebra построить окружности и с помощью бегунка рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения окружностей (рис. 3);
- обсудить два возможных случая касания окружностей (см. рис. 3);
- найти приближенные значения параметра для случаев касания;
- с помощью инструмента «Пересечение» отобразить точки пересечения окружностей, попробовать найти точнее



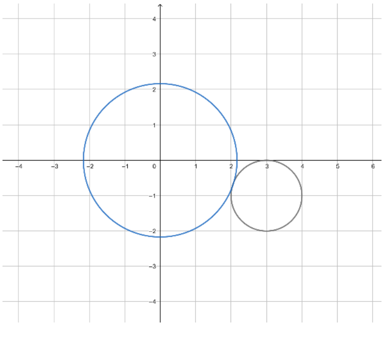
а) нет общих точек



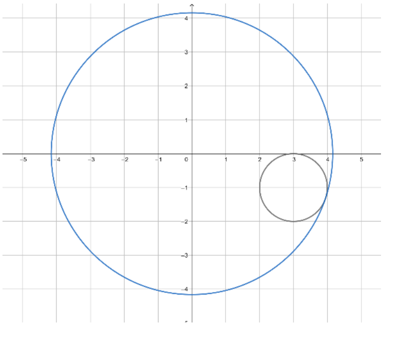
б) две точки пересечения



в) нет общих точек



г) внешнее касание



г) внутреннее касание

Рис. 3. Случаи взаимного расположения окружностей $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = a^2$

значения параметров для случаев касания.

По завершении работы над этим заданием с помощью вычислений необходимо найти точное решение задачи.

Так как во втором уравнении параметр a в квадрате, то в процессе решения рассмотрим неотрицательные значения параметра, тогда a можно геометрически интерпретировать как радиус окружности. Обозначим R_1 и R_2 радиусы неподвижной и подвижной окружностей соответственно:

$$R_1 = 1,\ R_1 = a$$

Расстояние между центрами окружностей:

$$d=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

Искомые значения параметра:

- для внешнего касания $R_1 + R_2 = d$, поэтому $a=\pm\left(\sqrt{10}-1\right)$;
- для внутреннего касания $R_2 = R_1 + d$, поэтому $a=\pm\left(\sqrt{10}+1\right)$.

Проведя полное исследование заданной системы уравнений, можно сформулировать общий ответ о количестве решений системы при всех возможных значениях параметра:

- при $|a|=\sqrt{10}-1$, $|a|=\sqrt{10}+1$ система имеет единственное решение;
- при $\sqrt{10}-1<|a|<\sqrt{10}+1$ система имеет два решения;
- при $|a|<\sqrt{10}-1$, $|a|>\sqrt{10}+1$ система не имеет решений.

Использование инструментов среды GeoGebra не отменяет необходимости понимания математических понятий, это лишь способ визуализации, средство для объяснения материала. В данном случае конечная цель – научить школьников самостоятельно решать задания с параметром без использования дополнительных цифровых инструментов. В рассмотренной системе в ответе участвуют иррациональные числа, поэтому точное его решение с помощью GeoGebra невозможно.

Задание 4. Исследуйте количество решений системы в зависимости от параметра a.

В этой задаче один и тот же параметр присутствует в обоих уравнениях, но играет разные роли. В первом случае он отвечает за расположение центра окружности, а во втором – за радиус окружности. Построив обе окружности, при увеличении по модулю значения параметра a создается иллюзия касания двух окружностей: при отрицательных значениях a – как будто достигается внутреннее касание, при положительных значениях a – похоже на внешнее касание. Это происходит из-за естественного желания увеличить масштаб, чтобы проследить поведение обеих окружностей. Если же достаточно приблизить кажущееся касание, то можно увидеть, что при сколь угодно больших по модулю значениях a окружности пересекаются в двух точках (для отрицательных a) или не имеют точек (при положительных a) https://www.geogebra.org/m/pbtdm26w. Увидеть точки пересечения окружностей или их отсутствие можно, применив соответствующий инструмент «Пересечение».

Изменяя значения параметра с помощью бегунка, нетрудно теперь найти, когда происходит переход от отсутствия общих точек к пересечению, то есть когда происходит касание двух окружностей. В данном случае, соответствующее значение параметра определяется точно $a = -0{,}25$. Тем не менее необходимо аналитически убедиться, что других изменений взаимного расположения окружностей нет.

Обозначим R_1 и R_2 радиусы первой и второй окружностей соответственно:

$$R_1 = 1,\ R_1 = |a|.$$

Расстояние между центрами окружностей $O_1\,(a, -1)$ и $O_2\,(-1, 0)$:

$$d=\sqrt{(a+1)^2+1}$$

В случае внешнего касания $R_1 + R_2 = d$:

$$1+|a|=\sqrt{(a+1)^2+1}$$

Полученное уравнение, очевидно, не имеет решений для положительных значений a, для $a < 0$ после раскрытия модуля получим уравнение:

$$1-a=\sqrt{(a+1)^2+1}$$

$$a = -0{,}25.$$

В случае внутреннего касания принципиально возможны два случая (табл. 2).

Ответ: при $a < -0{,}25$ система имеет два решения;

при $a = -0{,}25$ система имеет единственное решение;

при $a > -0{,}25$ система не имеет решений.

Задание 5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 8|x + y - 2| \\ (x-2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет больше двух решений.

Предыдущие формулировки были достаточно простыми вариантами заданий с параметром на комбинации окружностей. Зачастую в системах уравнения окружностей не даны в каноническом виде, то есть сначала необходимо преобразовать их таким образом, чтобы сначала привести к виду, простому для геометрической интерпретации. Более того, одно уравнение второй степени от переменных x и y может задавать комбинации дуг окружностей и/или прямых (лучей). Если предыдущие задания содержали только отдельные окружности и полуокружности, то пятое задание содержит композицию из дуг окружностей и для решения требует навыков раскрытия модуля, понимания того, что линейные неравенства от переменных x и y на координатной плоскости задают полуплоскости.

Первое уравнение системы

$$x^2 + y^2 - 4x - 4 = 8|x + y - 2|$$

после раскрытия модуля приводит к двум дугам окружностей, которые соединяются в точках с координатами $(0, 2)$ и $(4, -2)$ тем самым образуя «неваляшку» (рис. 4):

- при $y < 2 - x$

$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 40;$

- при $y > 2 - x$

$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 40.$

Исследование первого уравнения, несомненно, требует серьезной аналитической работы, но в рамках этой статьи больший акцент делаем на применение среды GeoGebra.

Второе уравнение задает семейство концентрических окружностей с центром в точке $O(2, 0)$ радиуса $|a|$ (при $a = 0$ окружность вырождается в точку) (см. рис. 4).

Изменяя значение параметра a, получаем три возможных случая взаимного расположения «неваляшки» и окружности:

- нет общих точек;
- две общие точки;
- четыре общие точки.

Таблица 2

К решению задания 4

$R_2 = R_1 + d$	$R_1 = R_2 + d$
$\lvert a\rvert=1+\sqrt{(a+1)^2+1}$	$1=\lvert a\rvert+\sqrt{(a+1)^2+1}$
При $a > 0$ получаем два уравнения, не имеющие решений (их левые части строго меньше правых):	
$a-1=\sqrt{(a+1)^2+1}$	$1-a=\sqrt{(a+1)^2+1}$
При $a < 0$ получаем два уравнения, тоже не имеющие решений (их левые части строго меньше правых):	
$-a-1=\sqrt{(a+1)^2+1}$	$1+a=\sqrt{(a+1)^2+1}$

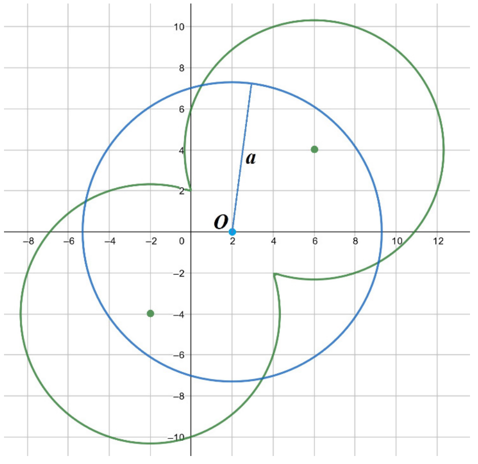
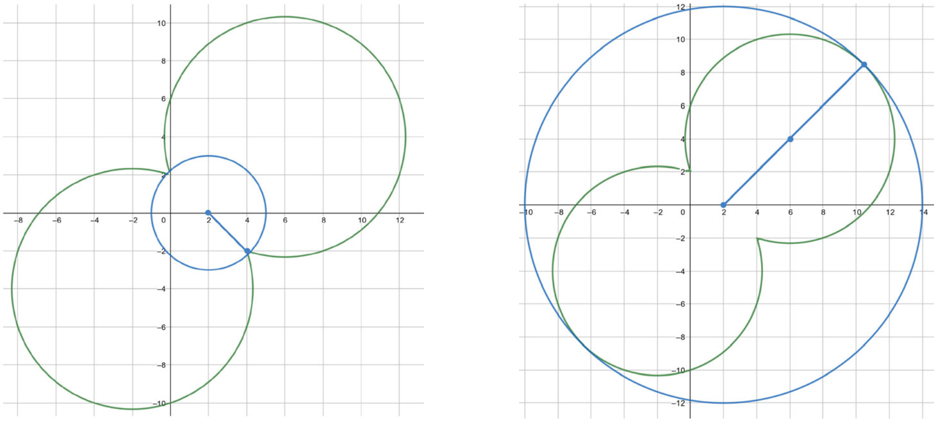


Рис. 4. Геометрические образы уравнений $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 8|x + y - 2|$ и $(x - 2)^2 + y^2 = a^2$

Найдем значения параметра *a*, соответствующие двум общим точкам (рис. 5).

Окончательная формулировка ответа: при система имеет больше двух решений.

Предложенная в статье методическая разработка была апробирована в рамках реализации дополнительной образовательной программы для школьников «Школа МИФ: математика, информатика, физика», организованной на базе Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема. Как показал этот опыт, ученики достаточно быстро начинают самостоятельно ориентироваться и в других формулировках задач с параметром на взаимное расположение окружностей, легче переходят от алгебраической к геометрической формулировке задач.



а) $|a| = 2\sqrt{2}$

б) $|a| = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

Рис. 5. Случаи двух общих точек

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далингер В. А.* Математика: задачи с параметрами: учеб. пособие для СПО: в 2 ч. Ч. 1. 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2020. 466 с.
2. *Далингер В. А.* Математика: задачи с параметрами: учеб. пособие для СПО: в 2 ч. Ч. 2. 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2020. 501 с.
3. *Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н.* Школа решения задач с параметрами: учеб.-метод. пособие. Изд. 3-е, доп. и испр. М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2018. 212 с.
4. *Ледовских И. А., Горбанева Л. В., Жудилова Ю. В.* Задачи с параметрами: с чего начать // Междунар. науч.-исслед. журн. 2020. № 11–3. С. 107–111.

5. Особенности методов решения нестандартных задач по математике с параметрами / Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная, Д. А. Мустафина [и др.] // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 2. С. 39.
6. *Шабашова О. В.* Система заданий как средство формирования умений применять функционально-графический метод для решения задач с параметрами // Математика в школе. 2019. № 5. С. 43–59.
7. What is GeoGebra? URL: https://www.geogebra.org/about (дата обращения: 20.08.2021).
8. *Троякова Г. А., Монгуш А. С., Танзы М. В.* Методика подготовки учащихся к решению задач с параметрами с использованием среды Geogebra // Мир науки, культуры, образования. 2018. № 5. С. 27–35.
9. *Кашицына Ю. Н.* Методика обучения решению задач с параметрами с использованием программы “Geogebra” // Мир науки, культуры, образования. 2020. № 1. С. 249–255.
10. *Курилова О. Л., Степанова Е. А.* Применение среды Geogebra при решении задач с параметрами (диск-приложение к журналу) // Математика в школе. 2020. № 4. С. 44.
11. *Ларин С. В.* Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде Geogebra: учеб. пособие для вузов. 2-еизд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2020. 233 с.

REFERENCES

1. Dalinger V. A. *Matematika: zadachi s parametrami: ucheb. posobie dlya SPO. In 2 vols. Vol. 1.* Moscow: Yurayt, 2020. 466 p.
2. Dalinger V. A. *Matematika: zadachi s parametrami: ucheb. posobie dlya SPO. In 2 vols. Vol. 2.* Moscow: Yurayt, 2020. 501 p.
3. Sevryukov P. F., Smolyakov A. N. *Shkola resheniya zadach s parametrami: ucheb.-metod. posobie*. Moscow: Ileksa; Stavropol: Servisshkola, 2018. 212 p.
4. Ledovskikh I. A., Gorbaneva L. V., Zhudilova Yu. V. Zadachi s parametrami: s chego nachat. *Mezhdunar. nauch.-issled. zhurn.* 2020, No. 11–3, pp. 107–111.
5. Matveeva T. A., Svetlichnaya V. B., Mustafina D. A. et al. Osobennosti metodov resheniya nestandartnykh zadach po matematike s parametrami. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya.* 2020, No. 2, pp. 39.
6. Shabashova O. V. Sistema zadaniy kak sredstvo formirovaniya umeniy primenyat funktsionalno-graficheskiy metod dlya resheniya zadach s parametrami. *Matematika v shkole.* 2019, No. 5, pp. 43–59.
7. What is GeoGebra? *Available at:* https://www.geogebra.org/about (accessed: 20.08.2021).
8. Troyakova G. A., Mongush A. S., Tanzy M. V. Metodika podgotovki uchashchikhsya k resheniyu zadach s parametrami s ispolzovaniem sredy Geogebra. *Mir nauki, kultury, obrazovaniya.* 2018, No. 5, pp. 27–35.
9. Kashitsyna Yu. N. Metodika obucheniya resheniyu zadach s parametrami s ispolzovaniem programmy “Geogebra”. *Mir nauki, kultury, obrazovaniya.* 2020, No. 1, pp. 249–255.
10. Kurilova O. L., Stepanova E. A. Primenenie sredy Geogebra pri reshenii zadach s parametrami (disk-prilozhenie k zhurnalu). *Matematika v shkole.* 2020, No. 4, p. 44.
11. Larin S. V. *Metodika obucheniya matematike: kompyuternaya animatsiya v srede Geogebra: ucheb. posobie dlya vuzov.* Moscow: Yurayt, 2020. 233 p.

Кириллова Дина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем, математики и правовой информатики Приамурского государственного университета имени Шолом-Алейхема

e-mail: dina_kir_03@mail.ru

Kirillova Dina A., PhD in Mathematics, Assistant Professor, Information Systems, Mathematics and Legal Informatics Department, Sholom-Aleichem Priamursky State University

e-mail: dina_kir_03@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.08.2021
The article was received on 20.08.2021