DOI: 10.31862/1819-463X-2019-5-144-155

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Н. И. Фирстова

Аннотация. *В статье показано применение метода замены переменной при решении алгебраических уравнений определенного вида. Выделены способы реализации использования метода замены переменной и возможности применения каждого способа (приема решения).*

Ключевые слова: *метод замены переменной, способы реализации (приемы решения уравнений), алгебраические уравнения.*

TRAINING TECHNIQUE FOR SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS WITH THE METHOD OF REPLACING A VARIABLE

N. I. Firstova

Abstract. *The article shows the application of the variable replacement method in solving algebraic equations of a certain type. The ways of implementing the use of the variable replacement method and the possibility of applying each method (decision making) are highlighted.*

Keywords: *variable replacement method, methods of implementation (methods for solving equations), algebraic equations.*

К возможности систематизации различных задач человечество шло очень долго, и только в начале XX в. русский методист И. Александров произвел систематизацию задач по методам решения и в отдельных случаях – по содержанию. Эта систематизация была не лишена недостатков, но она позволяла не решать отдельные задачи, а устанавливать общие методы различных типов задач. Именно уяснение идей общих методов является главным при обучении решению задач.

Термин «метод», применяемый в обучении математике, используется в различных аспектах:

1. Учебную деятельность принято рассматривать как деятельность познавательную. Поэтому в обучении находят отражение общие методы познания. В обучении математике чаще других используется анализ и синтез, индукция и дедукция, аналогия и сравнение.

2. В школьной математике используется в определенной степени методы математики – науки. Это, к примеру, векторный метод, метод ГМТ, метод координат и др. Если учащиеся овладевают указанными методами, то они смогут самостоятельно применить их к решению задач, доказательству теорем.

Таким образом, математические методы в процессе обучения становятся методами приобретения и применения знаний, трансформируются в методы учебной деятельности школьников.

3. Наиболее часто, говоря о методах применительно к учебному процессу, имеют в виду методы обучения.

В педагогике используется различные трактовки понятия «метод обучения»:

А. «Направленные на решение задач обучения».

Б. «Методы обучения – это способы передачи знаний и руководства познавательной деятельностью».

С. «Метод обучения является системой действий учителя, организующего практическую и познавательную деятельность ученика, которая устойчиво ведет к усвоению содержания образования», по И. Я. Лернеру.

В педагогической литературе отсутствует единый подход к определению понятия «метод», «метод обучения», «метод учения». Для выбора трактовки необходимо обратиться к философской литературе. Но и здесь анализ подходов показал отсутствие общепринятой трактовки понятия «метод».

В некоторых источниках под методом понимается способ достижения цели, определенным образом упорядоченная деятельность. В энциклопедии по философии метод определен как система результативных принципов, преобразующая практическую и познавательную деятельность.

«Метод – это не какая-то отмычка, а способ исследования науки возникающий из самого процесса исследования».

Традиционно в учебной и математической литературе рассматриваются специальные приемы решения уравнений. Между тем специфика решения уравнений каждого раздела – дело второстепенное. По существу используется четыре основных метода (**метод перехода от равенства, связывающего функции, к равенству, связывающему аргументы; метод замены переменной; метод разложения на множители и функционально-графический метод**) и их различные модификации. Самый распространенный из них – метод замены переменной. Искусство производить замену переменных заключается в том, чтобы увидеть, какая замена будет более рациональна и быстрее приведет к успеху.

Суть метода замены переменной заключается в том, что путем замены некоторого входящего в уравнение выражения, содержащего переменную, в исходном уравнении либо понижается степень, либо от дробного переходят к целому уравнению, либо иррациональное уравнение сводят к рациональному, то есть исходное уравнение сводится к простейшему. В 2002 г. в журнале «Математика в школе» была опубликована моя статья [10], посвященная методу замены переменной, в предлагаемой статье способы реализации дополнены.

С методом замены переменной в школьном курсе математики учащиеся знакомятся в 8-м классе, чаще всего после изучения темы «Квадратные уравнения». Данный метод применяется в уравнениях, где замена переменной очевидна или становится очевидной после некоторых элементарных тождественных преобразований.

Например, способ реализации: **явная замена** (то есть замена очевидна):

1) $(3x+2)^4 - 13(3x+2)^2 + 36 = 0$.

$(3x+2)^2 = y, y \geq 0$.

$y^2 - 13y + 36 = 0$, так как $D > 0$, найдем корни по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = 9 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (3x+2)^2 = 4 \\ (3x+2)^2 = 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+2 = 2 \\ 3x+2 = -2 \\ 3x+2 = 3 \\ 3x+2 = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -4/3 \\ x_3 = 1/3 \\ x_4 = -5/3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{0; \frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right\}$.

2) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 9} = 3$.

Замена очевидна $\sqrt{x^2 - x + 9} = y$, $y \geq 0$ (с учетом значения подкоренного выражения можно уточнить ограничения на «новую» переменную: $y \geq \sqrt{8,75}$), остается к обеим частям прибавить по 9 и получить y^2, исходное уравнение примет вид: $y^2 + y - 12 = 0$. Исходя из вида уравнения, найдем корни по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = -4 \\ y_2 = 3 \end{array}\right. .$$

С учетом ограничений на «новую» переменную удовлетворяет значение второго корня. Вернемся к «старой» переменной:

$\sqrt{x^2 - x + 9} = 3$.

$x^2 - x + 9 = 9$.

$x(x-1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{0; 1\}$.

3) $\left(x^2 + 10x\right)^2 + (x+5)^2 = 157$.

Замену переменной можно увидеть, если воспользоваться формулой квадрата суммы для второго члена уравнения:

$\left(x^2 + 10x\right)^2 + \left(x^2 + 10x + 25\right) = 157$.

$x^2 + 10x = y$.

$y^2 + y + 25 = 157$.

$y^2 + y - 132 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 11 \\ y_2 = -12 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x - 11 = 0 \\ x^2 + 10x + 12 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -11 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -5 + \sqrt{13} \\ x_4 = -5 - \sqrt{13} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-11; 1; -5 \pm \sqrt{13}\right\}$.

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики и представляет интерес для изучения, так как в известном смысле именно с помощью уравнений записываются важнейшие задачи, связанные с познанием реальной действительности. Формируя у учащихся в процессе обучения специальные умения и навыки по решению алгебраических уравнений методом замены переменной, учащиеся овладевают новым мощным методом решения уравнений.

При решении уравнений удачная замена переменных позволяет свести задачу к более простой. Однако во многих случаях удобная замена далеко не очевидна, и поэтому необходимо выполнить некоторые преобразования (уравнения с явной заменой, например, биквадратные и т. п. в статье не рассматриваются). Эти преобразования – приемы (или **способы реализации**) и будут рассмотрены в данной статье.

В уравнениях, предлагаемых вашему вниманию, стандартный прием решения (в рациональных – приведение к общему знаменателю, в иррациональных – возведение в степень) приводит к трудоемким вычислениям без видимой надежды на успех.

Способы реализации метода замены переменной

1. Использование основного свойства дроби.

Данный прием применяется в уравнениях следующего вида:

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} \pm \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D,\ D \neq 0,$$

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} \pm \frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = D,\ D \text{ – любые значения,}$$

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} \pm \frac{ax^2+b_2x+c}{ax^2+b_3x+c} = D,\ D \text{ – любые значения,}$$

где a, b, c, A, B, D – постоянные, $a \neq 0$.

Уравнения данного вида решаются так: проверив, является ли $x = 0$ корнем уравнения, делят числитель и знаменатель каждой дроби на $x \neq 0$ и производят замену $ax + \frac{c}{x} = t$.

Например:

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}.$$

$x = 0$ – не корень уравнения. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на $x \neq 0$. Получим: $\dfrac{x-10+\frac{15}{x}}{x-6+\frac{15}{x}} = \dfrac{3}{x-8+\frac{15}{x}}$.

Заменив $x-8+\frac{15}{x} = t$, имеем: $\frac{t-2}{t+2} = \frac{3}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5t-6=0 \\ t+2 \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 6 \\ t_2 = -1. \end{array}\right.$

Вернемся к «старой» переменной: $\begin{array}{l} = 6 \\ = -1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-14x+15=0 \\ x^2-7x+15=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}$.

Ответ: $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34}$.

2. Выделение квадрата двучлена.

$$x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$$

Заметив, что левая часть уравнения представляет собой сумму квадратов, выделим полный квадрат суммы или разности (это зависит от того, чтобы получившееся уравнение содержало одно и то же выражение с переменной).

$$(x)^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2=5.$$

$$(x)^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}-2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}=5.$$

Сгруппируем первый, второй и четвертый члены:

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5.$$

$$\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-5=0.$$

Введем замену: $\frac{x^2}{x+2}=t$, получим $t^2+4t-5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1\\ t_2=-5\end{array}\right.$. Вернувшись к «старой» переменной, имеем: $\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+2}=1\\ \frac{x^2}{x+2}=-5\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\ x^2+5x+10=0\end{array}\right.\\ x\neq-2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.$.

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-1.$

3. Переход к системе.

Уравнения вида $\sqrt[n]{af(x)+b}\pm\sqrt[n]{cf(x)+d}=m$, где $a=k\cdot c$, где k принимает любые действительные значения.

Например:

3.1. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2.$ (1)

Положим $u=\sqrt[3]{8x+4}$, $v=\sqrt[3]{8x-4}$. (2)

Тогда уравнение (1) запишется так: $u-v=2$. Поскольку мы ввели две новые функции, надо найти еще одно уравнение, связывающее u и v. Для этого возведем оба равенства (2) в куб и заметим, что $u^3-v^3=8$. Итак, надо решить систему:

$$\begin{cases}u-v=2\\ u^3-v^3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u-v=2\\ (u-v)(u^2+uv+v^2)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u-v=2\\ (u-v)^2+3uv=4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} u-v=2 \\ 3uv=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases} \\ \begin{cases} u=0 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{8x+4}=2 \\ \sqrt[3]{8x-4}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{8x+4}=0 \\ \sqrt[3]{8x-4}=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}$.

3.2. $x\cdot\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\cdot\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$. (1)

Пусть: $x\cdot\frac{5-x}{x+1}=u$, $x+\frac{5-x}{x+1}=v$. (2)

Тогда (1) уравнение примет вид: $u\cdot v=6$.

Попробуем составить еще одно уравнение, зависящее от u и v. Для этого найдем сумму u и v.

$$x\cdot\frac{5-x}{x+1}+\frac{5-x}{x+1}+x=\frac{5-x}{x+1}\cdot(x+1)+x=5-x+x=5.$$

Итак, надо решить систему $\begin{cases} u\cdot v=6 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\cdot\frac{5-x}{x+1}=2 \\ x+\frac{5-x}{x+1}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\cdot\frac{5-x}{x+1}=3 \\ x+\frac{5-x}{x+1}=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ответ: $x=1, x=2$.

4. Раскрытие множителей парами.

Уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$, $m\neq 0$, где $a+b=c+d$ или $a+c=b+d$ или $a+d=b+c$.

Например:

$(x-1)(x-7)(x-4)(x+2)=40$. Проверим, имеет ли смысл применять данный способ: $7-2=1+4$, то есть $5=5$, значит, надо перемножить первый множитель с третьим и второй множитель с четвертым:

$$\left(x^2-5x-14\right)\left(x^2-5x+4\right)=40.$$

Введем замену: $x^2-5x-14=t$, получим: $t(t+18)=40$.

$$t^2+18t-40=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-20 \\ t_2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-14=-20 \\ x^2-5x-14=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=0 \\ x^2-5x-16=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=3 \\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=2, x_2=3, x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$.

5. Раскрытие множителей парами и деление обеих частей уравнения.

Уравнение вида: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$, $m \neq 0$, где $ab=cd$, или $ac=bd$, или $ad=bc$.

Например:

$(x-1)(x-2)(x-8)(x-4)=4x^2$. Проверим, имеет ли смысл применять данный способ: $-8\cdot(-1)=(-2)\cdot(-4)$, то есть 8 = 8, значит надо перемножить первый множитель и третий и второй множитель и четвертый: $(x^2-9x+8)(x^2-6x+8)=4x^2$.

Так как $x=0$ – не корень, разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$. Получим:

$$\left(x-9+\frac{8}{x}\right)\left(x-6+\frac{8}{x}\right)=4.$$

Введем замену: $x-9+\frac{8}{x}=t$, уравнение будет иметь следующий вид:

$$t\cdot(t+3)=4 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-9+\frac{8}{x}=1 \\ x-9+\frac{8}{x}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-10x+8=0 \\ x^2-5x+8=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}.$$

Ответ: $x_{1,2}=5\pm\sqrt{17}$.

6. Сведение к однородному уравнению.

Чаще встречаются однородные уравнения второй степени:

$Af^2(x)+Bf(x)g(x)+Cg^2(x)=0$, где A, B, C – постоянные, отличные от нуля.

Например:

$$2\cdot(x^2+x+1)^2-7\cdot(x-1)^2=13\cdot(x^3-1).$$

В данном случае замена очевидна: $x^2+x+1=u$ и $x-1=v$. Данное уравнение примет вид $2u^2-7v^2=13uv$, то есть однородного уравнения второй степени.

Мы же рассмотрим более подробно следующее уравнение:

$$(x^2-5x+1)(x^2-4)=6\cdot(x-1)^2. \quad (1)$$

Вид уравнения не указывает, что это однородное уравнение. Преобразуем первый множитель: выделим из него выражение, равное второму множителю:

$$x^2-5x+1=x^2-4-5x+5=(x^2-4)-5(x-1). \quad (2)$$

Подставляя (2) уравнение в (1), получаем:

$$((x^2-4)-5(x-1))\cdot(x^2-4)=6\cdot(x-1)^2.$$

Раскроем скобки:

$$(x^2-4)^2-5\cdot(x-1)(x^2-4)=6\cdot(x-1)^2.$$

Введем замену: $x^2-4=u$ и $x-1=v$, имеем:

$u^2-5vu=6v^2$. Получаем однородное уравнение второй степени относительно u и v. Делим его на $v^2\neq 0$ (если $v=0$, то и $u=0$, то есть $\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}$ – данная система решений не имеет).

Получаем уравнение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2-5\left(\frac{u}{v}\right)-6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{u}{v}=6\\ \frac{u}{v}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-4}{x-1}=6\\ \frac{x^2-4}{x-1}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+2=0\\ x^2+x-5=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=3\pm\sqrt{7}\\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=3\pm\sqrt{7}, x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

7. Тригонометрическая подстановка.

Тригонометрические подстановки используются в тех случаях, когда иррациональное уравнение сложно решить обычным способом, то есть трудно избавиться от иррациональности. Исходное иррациональное уравнение сводится к тригонометрическому уравнению.

Например:

$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

$D(f):1-x^2\geq 0\Rightarrow x\in[-1;1]$. Значит, можно ввести замену $x=\sin\alpha$ или $x=\cos\alpha$. Пусть $x=\sin\alpha$, где $\alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]$ (на этом отрезке функция синуса принимает все свои значения). Подставив замену в уравнение, получим:

$$\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=4\sin^3\alpha-3\sin\alpha\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\cos^2\alpha}=-\sin 3\alpha\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|\cos\alpha|+\sin 3\alpha=0\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\alpha+\sin 3\alpha=0\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\Pi}{2}-\alpha\right)+\sin 3\alpha=0\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\left(\alpha+\frac{\Pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\Pi}{4}-2\alpha\right)=0\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha+\frac{\Pi}{4}=\Pi n\\ 2\alpha-\frac{\Pi}{4}=\frac{\Pi}{2}+\Pi k\end{array}\right. \quad \mathrm{n,k}\in\mathrm{Z}\\ \alpha\in\left[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right]\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha_1=-\frac{\Pi}{4}\\ \alpha_2=-\frac{\Pi}{8}\\ \alpha_3=-\frac{3\Pi}{8}\end{array}\right.$$

Вернемся к «старой» переменной:

$$x_1 = \sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \ x_2 = \sin\left(-\frac{\Pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\ \ x_3 = \sin\frac{3\Pi}{8} = \frac{1}{2}\cdot$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

8. Возвратные и симметричные (или симметрические) уравнения.

Рассмотрим уравнение четвертой степени:

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, где $a_0 \neq 0$.

Если коэффициенты уравнения, равностоящие от концов уравнения, удовлетворяют условиям: $\frac{a_1}{a_3} = \lambda \neq 0,\ \ \frac{a_0}{a_4} = \lambda^2$, то уравнение называется возвратным уравнением четвертой степени. Возвратные уравнения четвертой степени решаются так: обе части уравнения делят на $x^2 \neq 0$ ($x = 0$ – не корень), затем группируются члены, равностоящие от концов, и производится замена $x + \frac{\lambda}{x} = t$.

Например:

$8x^4 - 10x^3 - 22x^2 + 15x + 18 = 0$. Проверим, является ли уравнение возвратным: $-\frac{10}{15} = -\frac{2}{3};\ \ \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow$ уравнение возвратное.

Разделив на $x^2 \neq 0$, получаем: $8x^2 - 10x - 22 + \frac{15}{x} + \frac{18}{x^2} = 0$.

Сгруппируем: $\left(8x^2 + \frac{18}{x^2}\right) - \left(10x - \frac{15}{x}\right) - 22 = 0$

$$2\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 5\left(2x - \frac{3}{x}\right) - 22 = 0 \qquad (1).$$

Введем замену: $2x - \frac{3}{x} = t$. Чтобы выразить $\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right)$ через t, возведем обе части замены в квадрат и получим: $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = t^2$ или $4x^2 - 12 + \frac{9}{x^2} = t^2 \Rightarrow 4x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 + 12.$

Переписав уравнение (1) через t, имеем:

$$2\left(t^2 + 12\right) - 5t - 22 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \text{ или}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{3}{x} = 2 \\ 2x - \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 4x^2 - x - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\ x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{8} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}, x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{8}$.

Симметричные (или симметрические) уравнения являются частным случаем возвратных уравнений при $\lambda = 1,$ поэтому решаются по аналогии.

9. Уравнения вида $(x-a)^4 \pm (x-b)^4 = c$, $c \neq 0$ **замена** $x = y + \frac{a+b}{2}$.

Замена такого вида вводится для того, чтобы в основаниях степеней $(x-a, x-b)$ получить сопряженные выражения $(y-m, y+m)$. После возведения в степень уравнения вида $(y-m)^4 \pm (y+m)^4 = c$ получается уравнение, способ решения которого известен.

Замечание: Замену вида $x = y + \frac{a+b}{2}$ можно применять и к уравнениям вида: $(x-a)^n \pm (x-b)^n = c, c \neq 0, c \in N.$

Например:

$(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.

Введем замену $x = y + \frac{2+3}{2} = y + \frac{5}{2}$. Подставим в исходное уравнение и получим: $\left(y+\frac{1}{2}\right)^4 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^4 = 1$. После возведения в степень и приведения подобных получим: $4y^4 + 3y^2 - \frac{7}{8} = 0$, откуда $y = \pm\frac{1}{2}$. Вернемся к «старой» переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2} = 3; 2$.

Школьной программой отводится достаточно много времени на решение алгебраических уравнений. На наш взгляд, это связано с тем, что, научившись решать их, ученик не будет испытывать трудностей с большинством трансцендентных уравнений, решение которых, по сути, сводится к решению алгебраических уравнений.

Замечание: предложенные в статье уравнения можно решить и другими способами или методами.

Задания для самостоятельной работы

Вариант № 1

1) $x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 16x + 4 = 0.$

2) $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-10} = 1.$

3) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297.$

4) $\frac{x}{x^2-3x+8} - \frac{x}{x^2+2x+8} = \frac{5}{24}.$

5) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11.$

6) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$

7) $(x^2+2x)^2 - (x+1)^2 = 55.$

8) $(x^2-x+1)^2 + 2x^2(x^2-x+1) - 3x^4 = 0.$

9) $(x+4)(x+6)(x-2)(x-3) = -2x^2.$

10) $(x+1)^5 - (x-5)^5 = 1056.$

Вариант № 2

1) $\frac{2x}{4x^2+3x+8}+\frac{3x}{4x^2-6x+8}=\frac{1}{6}.$

2) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

3) $\sqrt{1-2x}\cdot\left(1-4x\sqrt{1+2x}\right)=8x^2-1.$

4) $\left(x^2-8x\right)^2+3\left(x-4\right)^2=76.$

5) $4x^4+6x^3-10x^2-9x+9=0.$

6) $\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=15.$

7) $x^2+\frac{81x^2}{\left(x+9\right)^2}=40.$

8) $20\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

9) $\left(x+4\right)\left(x+7\right)\left(x-14\right)\left(x-2\right)=-26x^2.$

10) $\left(x+1\right)^4+\left(x-4\right)^4=97.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егерев В. К., Мордкович А. Г.* 100 х 4 задач для поступающих в вузы. М.: Слог, 1993. 58 с.
2. *Кючунов А. Н.* А можно гораздо лучше! // Математика в школе. 1988. № 5. С. 53–54.
3. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. М.: Просвещение, 1991. 352 с.
4. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов. М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 1998. 318 с.
5. Методика преподавания математики в школе: частные методики / под ред. Ю. М. Колягина. М.: Просвещение, 1977. 678 с.
6. *Мордкович А. Г.* Беседы с учителями математики. М.: Школа-Пресс, 1995. 238 с.
7. *Мордкович А. Г.* Решаем уравнения. М.: Школа-Пресс, 1995. 38 с.
8. Сборник конкурсных задач по математике. СПб.: Специальная литература, 1997. 560 с.
9. Справочник для поступающих в Московский университет. М.: Изд-во Московского ун-та, 1992–1997.
10. *Фирстова Н. И.* Метод замены переменной при решении алгебраических уравнений // Математика в школе. 2002. № 5. С. 68–71.

REFERENCES

1. Egerev V. K., Mordkovich A. G. *100 x 4 zadach dlya postupayushchikh v vuzy.* Moscow: Slog, 1993. 58 p.
2. Kyuchunov A. N. A mozhno gorazdo luchshe! *Matematika v shkole.* 1988, No. 5, pp. 53–54.
3. Litvinenko V. N., Mordkovich A. G. *Praktikum po elementarnoy matematike: Algebra. Trigonometriya: ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. spets.* Moscow: Prosveshchenie, 1991. 352 p.
4. Merzlyak A. G., Polonskiy V. B., Yakir M. S. *Algebraicheskiy trenazher: Posobie dlya shkolnikov i abiturientov.* Moscow: Ileksa; Kharkov: Gimnaziya, 1998. 318 p.
5. Kolyagin Yu. M. (ed.) *Metodika prepodavaniya matematiki v shkole: chastnye metodiki.* Moscow: Prosveshchenie, 1977. 678 p.
6. Mordkovich A. G. *Besedy s uchitelyami matematiki.* M.: Shkola-Press, 1995. 238 p.
7. Mordkovich A. G. *Reshaem uravneniya.* Moscow: Shkola-Press, 1995. 38 p.
8. Sbornik konkursnykh zadach po matematike. St. Petersburg: Spetsialnaya literatura, 1997. 560 p.

9. Spravochnik dlya postupayushchikh v Moskovskiy universitet. Moscow: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1992–1997.
10. Firstova N. I. Metod zameny peremennoy pri reshenii algebraicheskikh uravneniy. *Matematika v shkole.* 2002, No. 5, pp. 68–71.

Фирстова Наталья Игоревна, кандидат педагогических наук, доцент, профессор Кафедры теории и методики обучения математике и информатике Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета

e-mail: steva54@mail.ru

Firstova Natalya I., PhD in Education, Associate Professor, Professor, Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science Department, Institute of Mathematics and Computer Science, Moscow Pedagogical State University

e-mail: steva54@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.07.2019
The article was received on 24.07.2019