

УДК 378.147
ББК 74.489

ДИАГНОСТИКА УРОВНЯ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Л. В. Жук

Аннотация. В статье описаны результаты исследования, посвященного разработке средств диагностики уровня развития пространственного мышления будущих учителей математики при обучении геометрии. Пространственное мышление является важным компонентом мыслительной деятельности, обеспечивающим ориентацию в практическом и теоретическом пространстве (как видимом, так и воображаемом) при решении задач. Опираясь на исходными образами, созданными на различной графической основе, пространственное мышление обеспечивает их преобразование и создание новых образов. Основными качественными показателями, характеризующими пространственное мышление, являются полнота образа, тип оперирования пространственным образом, широта оперирования с учетом используемой графической основы, используемая система отсчета (пространственная ориентация «от себя», от базы, от произвольной точки отсчета). Задания, ориентированные на диагностику уровня развития пространственного мышления, должны обеспечивать проверку умений создавать чертеж или компьютерную модель, осуществлять преобразования исходного образа (вращение, наложение, совмещение и т. п.), передавать в образе не только форму и размеры объекта, но и динамику пространственной размещенности его элементов, произвольно изменять точку отсчета.

Ключевые слова: математическое мышление, обобщенные приемы пространственного мышления, образ восприятия, обобщенное представление, предпонятие.

DIAGNOSTICS OF THE LEVEL OF DEVELOPMENT OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS' SPATIAL THINKING IN THE PROCESS OF TEACHING GEOMETRY

L. V. Zhuk

Abstract. The article presents the results of a study on the development of diagnostic tools for the level of development of spatial thinking of future mathematics teachers in teach-

ing geometry. Spatial thinking is an important component of mental activity, providing orientation in practical and theoretical space (both visible and imaginary) when solving problems. Using initial images created on a different graphic basis, spatial thinking provides their transformation and the creation of new images. The main qualitative indicators characterizing spatial thinking are the completeness of the image, the type of operation in a spatial manner, the breadth of operation, taking into account the graphic basis used, the reference system used (spatial orientation "from oneself", from the base, from an arbitrary reference point). Tasks aimed at diagnosing the level of development of spatial thinking should provide testing of skills to create a drawing or a computer model, carrying out transformations of the original image (rotation, overlay, alignment, etc.), transmitting in the image not only the shape and size of the object but also the dynamics of spatial distribution of its elements, arbitrarily change the reference point.

Keywords: *mathematical thinking, the generalized tools of spatial thinking, an image of perception, general concept, pre-concept.*

Современная система математического образования характеризуется наличием школ и классов различного профиля, многообразием методов, средств, форм обучения, внедрением образовательных стандартов нового поколения [1; 2]. В условиях перехода от информационно-трансляционной модели обучения к деятельностной, направленной на личностное развитие учащихся, формирование у них метапредметных знаний и универсальных учебных действий, определяются повышенные требования к профессиональной подготовке учителя математики: «...учитель становится ключевой фигурой общества XXI века. Это предъявляет исключительно высокие требования как к интенсификации профессионального самосовершенствования и формам повышения квалификации учителей, так и к качеству подготовки будущих учителей в педагогических учебных заведениях» [3, с. 284].

Одной из базовых способностей будущего учителя математики, определяющей уровень его профессионализма, является математическое мышление – сложная динамичная структура, включающая интуитивный, пространственный, метрический, логический, конструктивный и символический компоненты [4]. Важнейшая роль в данной структуре отводится пространственному компоненту, обеспечивающему выделение в объектах действительности

пространственных свойств и отношений (формы, величины, протяженности), создание образов и оперирование ими при решении задач. Педагог с развитым пространственным мышлением способен обеспечить высокий уровень математической учебно-познавательной деятельности учащихся, преподнести изучаемый материал в запоминающейся образной форме, способствуя эффективности усвоения и углублению понимания.

Формирование пространственного компонента мыслительной деятельности бакалавра педагогического образования является основной развивающей целью изучения геометрических дисциплин. В то же время анализ результатов выполнения диагностических работ студентов физико-математического профиля свидетельствует о том, что геометрическая составляющая вузовской подготовки будущих учителей математики недостаточно ориентирована на развитие пространственного мышления. Проблема состоит в том, что традиционное построение геометрии как учебной дисциплины осуществляется на аксиоматической основе и требует для своего усвоения наличия хорошо развитого понятийного аппарата.

Наглядные представления являются лишь иллюстрацией геометрических аксиом, определений, теорем. Высокий уровень абстрактности вузовского курса геометрии, его насыщенность алгебраическими струк-

турами, оторванность от пространственных представлений приводят к тому, что будущие учителя не в полной мере владеют способами изображения геометрических фигур, умениями мысленно представлять и преобразовывать геометрические объекты. Поиск новых методов и средств обучения геометрии следует сосредоточить в направлении образной интерпретации информации и моделирования.

Известно, что пространственный компонент мыслительной деятельности характеризуется индивидуальными особенностями, определяемыми врожденными и приобретенными качествами восприятия пространства, взаимодействия с ним при решении задач. В то время как одни индивидуальные характеристики являются устойчивыми к влиянию обучения, другие отличаются «гибкостью», восприимчивостью по отношению к этому влиянию. В связи с этим важным условием практической реализации концепции развития пространственного мышления в процессе обучения математическим дисциплинам является применение методов его качественной и количественной оценки.

Цель данного исследования – разработка диагностической методики для оценки уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности будущих учителей математики. Достижение указанной цели предполагает тщательное изучение структуры пространственного компонента мыслительной деятельности в области геометрии, а также определение уровней и критериев развития пространственного мышления будущих бакалавров.

Теоретико-методологическую основу исследования составили философские подходы к пониманию математического мышления (Ж. Адамар, Д. Мордухай-Болтовский, Ж. Пиаже, А. Пуанкаре); психолого-педагогические концепции структуры пространственного мышления как одной из важнейших составляющих математического мышления (Г. Д. Глейзер, В. А. Крутецкий, В. Хаекер, Т. Циген); труды, посвященные изучению генезиса и методов исследования про-

странственного компонента мыслительной деятельности (И. С. Якиманская, И. Я. Каплунович. С. Л. Рубинштейн и др.); теория и методика преподавания геометрии (Г. Д. Глейзер, В. А. Гусев, Е. Н. Кабанова-Меллер).

В современных исследованиях *пространственное мышление* представлено как специфический вид мыслительной деятельности, проявляющейся в ситуациях, требующих создания образов на различной наглядной основе, оперирования образами, а также ориентации в пространстве [5, с. 28]. В образе отражаются, в первую очередь, пространственные характеристики объекта – его величина, форма, взаимное расположение составляющих элементов, размещенность относительно выбранной точки отсчета на плоскости или в пространстве. Анализ исследований И. А. Бреус [6], И. Г. Вальцевой [7], Г. Д. Глейзера [4], И. Я. Каплуновича [8], А. Я. Цукаря [9], И. С. Якиманской [5] позволил выделить в составе пространственного компонента мыслительной деятельности в области геометрии следующие обобщенные приемы и образующие их операции (табл. 1).

Выделенные обобщенные приемы были положены в основу разработки диагностического инструментария для определения уровня сформированности пространственного компонента мыслительной деятельности бакалавров педагогического образования. Остановимся подробнее на описании уровней и характеризующих их критериев.

Уровень образа восприятия. Согласно законам психологии, познание пространства организуется через перцептивную деятельность, требуя создания образа, отражающего форму и положение объекта в пространстве, взаимное расположение составляющих его элементов. Создание образа восприятия осуществляется посредством предметных действий с фигурами – вычерчивания, конструирования, представления в виде материального макета или трехмерной компьютерной модели. Традиционная практика обучения геометрии в вузе отличается избыточной формализацией и строгостью

Таблица 1

Характеристика уровней развития пространственного компонента мыслительной деятельности в области геометрии

Уровни развития	Обобщенные приемы	Состав приема
Образ восприятия	1. <i>Создание первичного образа</i> , закрепляющего существенные признаки воспринимаемого объекта	В наглядно воспринимаемом объекте выделяются отдельные элементы, происходит идентификация пространственных и метрических соотношений фигуры как носителя понятия
Обобщенное представление	2. <i>Создание вторичного образа</i> без использования наглядной основы	Образ лишается «привязанности» к единичному объекту, становясь обобщенным образом класса объектов
Предпонятие	3. <i>Оперирование пространственным образом</i> : трансформация исходного образа под влиянием условий задачи. <i>Три типа оперирования образом</i> : 3.1. « <i>Движение</i> » – изменение пространственного положения имеющегося в представлении образа. 3.2. « <i>Реконструкция</i> » – изменение структуры имеющегося в представлении образа. 3.3. « <i>Композиция</i> » – одновременное изменение положения в пространстве и структуры образа	Мысленный перенос, поворот, центральная или осевая симметрия, гомотетия, параллельное или ортогональное проецирование: Мысленные вращения, перемещения образа посредством смены точки отсчета. Мысленные наложения, совмещения, рассечения и т. п. Мысленное «манипулирование» образом, приводящее к появлению «промежуточных» образов
	4. <i>Ориентация в пространстве</i> – определение местоположения или направления движения объекта	Базируется на деятельности по созданию образов и оперированию ими

изложения материала, игнорированием возможностей наглядной интерпретации геометрических понятий. Альтернативный подход заключается в сопровождении новых для учащихся терминов соответствующими ассоциативными образами, в так называемой «знаковой натурализации геометрических понятий» [10], обусловленной психодидактической задачей *осознания*: аналитические рассуждения приобретают геометрический смысл, в результате достигается понимание обучающимся идеальной геометрической модели.

Специфика содержания создаваемого образа, мера отражения в нем простран-

ственных характеристик объекта определяют успешность дальнейшего оперирования этим образом. В ходе опытно-экспериментальной работы проводилась дифференциация учащихся-бакалавров по уровню «образ восприятия» на основе такой важной характеристики, как *полнота образа*, отражающей его структуру, форму, величину, расположение составляющих элементов относительно заданной точки наблюдения.

Стало очевидным, что форма и величина определяются студентами без особых затруднений, в то же время не всем учащимся доступно четкое воспроизведение пространственных соотношений. На *низ-*

ком уровне сформированности перцептивной деятельности проявляются умения создавать двумерные и трехмерные образы объектов по аналитическому выражению или конструктивному описанию (выполнять чертеж или компьютерную модель), вычленять данные и искомые элементы, определять фигуру как носитель понятия. При этом образы характеризуются статичностью и фрагментарностью. *Средний уровень* перцептивной деятельности характеризуется умениями создавать двумерные и трехмерные образы объектов, дополнять чертеж или компьютерную модель новыми элементами в соответствии с заданными условиями, верно отражать их форму и величину, анализировать существенные признаки фигуры. Образы статичны, но целостны, в некоторых случаях оригинальны, имеют выразительные детали. На *высоком уровне* наблюдаются умения создавать двумерные и трехмерные образы объектов, дополнять чертеж или компьютерную модель новыми элементами, верно отражать их форму и величину, а также пространственную размещенность относительно заданной системы отсчета, мысленно группировать отдельные элементы фигуры. Образы целостны, разнообразны, оригинальны, проявляются быстрота, гибкость мышления, происходит «оживление» объектов.

Уровень обобщенного представления. На данном этапе происходит преодоление знаковой натурализации посредством решения психодидактических задач осмысления и обобщения деятельности: учащийся осваивает способы оперирования чертежом, позволяющие трансформировать, видоизменять имеющиеся в представлении образы, ориентироваться в пространстве, тем самым мысленно воссоздавая характеристики геометрического объекта, фиксированные в чертеже.

Уровень предпонятия. На данном этапе осуществляется оперирование созданным пространственным образом – его мысленное видоизменение, преобразование, в процессе которого образ трансформируется в условиях полного абстрагирования от

наглядности. Важнейшей устойчивой характеристикой пространственного мышления психологами признан *тип оперирования* – доступный учащемуся в условиях решения поставленной задачи способ трансформации созданного образа. На *низком уровне* сформированности предпонятия проявляется лишь умение изменять пространственное положение имеющегося в представлении образа; на *среднем уровне* оно дополняется умением выполнять структурные преобразования; наконец, на *высоком уровне* диагностируется умение одновременно, неоднократно изменять пространственную размещенность и композицию исходного образа. Критериями сформированности умения оперировать образами выступают *широта оперирования* (возможность выполнять преобразования на различном графическом материале) и *свобода оперирования* (легкость перехода между графическими изображениями, независимость от конкретной точки отсчета).

Важным показателем сформированности предпонятия выступает также *способность ориентироваться в пространстве*, развитие которой невозможно без опоры на деятельность по созданию пространственных образов и оперированию ими. Пространственная ориентация проявляется в адекватном выборе точки отсчета в заданных условиях. Как правило, при конструировании моделей геометрических фигур точкой отсчета является сам учащийся. При решении задач, требующих оперирования образом, исходная точка находится вне субъекта – либо выбирается самостоятельно, либо задается объективно. Наиболее трудный способ ориентации в пространстве – при произвольно и постоянно меняющейся точке отсчета – характерен для высокого уровня развития пространственного мышления, обеспечивающего полное понимание геометрического пространства.

В соответствии с выделенными критериями были разработаны диагностические задания, ориентированные на проверку умений, составляющих пространственный

Таблица 2

Диагностические задания для оценки уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности в области геометрии

Оценка уровней создания образа восприятия, обобщенного представления		
низкий	средний	высокий
<p><i>Составить уравнение и построить окружность радиуса 5, проходящей через полюс, центр которой лежит на полярной оси</i></p>	<p><i>В репере (O, \vec{i}, \vec{j}) заданы уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $y = kx + m$. Определите случаи взаимного расположения гиперболы и прямой, укажите необходимое и достаточное условие их касания, пересечения, отсутствия общих точек</i></p>	<p><i>Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$ вокруг 1) оси Ox, 2) оси Oz</i></p>
Оценка уровня предпонятия		
низкий	средний	высокий
<p><i>Найти образ параболы 1) при повороте на 90°, на -90°, 2) при композиции поворота на 90° с центром в точке O и параллельного переноса на вектор $a = (m, n)$. Самостоятельный выбор точки отсчета. Найти уравнение и построить множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой</i></p>	<p><i>Найти коэффициент сжатия, переводящего эллипс $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ в окружность; указать количество решений задачи и изобразить эти решения. Решение задачи с объективно заданной точкой отсчета. Построить параболу в прямоугольной системе координат и найти ее параметр, если в этой системе заданы координаты фокуса $F(4;2)$ и уравнение директрисы $x + 3y - 6 = 0$</i></p>	<p><i>Эллипсоид, заданный уравнением $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$ получается параллельным переносом некоторой поверхности на вектор $\vec{a}(1, 2, 3)$ и трех последовательных сжатиях пространства к плоскостям Oxz с коэффициентом $3/4$, Oxz с коэффициентом $4/5$, Oyz с коэффициентом $3/4$. Найдите уравнение и постройте эту поверхность. Решение задачи при произвольно меняющейся точке отсчета. В прямоугольной системе координат и найти линию, образованную движущейся точкой $M(x, y, z)$, которая равномерно вращается вокруг оси Oz и одновременно перемещается параллельно оси Oz</i></p>

компонент мыслительной деятельности: умение создавать чертеж, производить различные преобразования исходного образа (вращение, наложение, совмещение); умение отражать не только форму и размер геометрического объекта, но и пространственную размещенность его элементов,

умение произвольно изменять точку отсчета. Содержательной основой диагностического инструментария выступали ключевые разделы аналитической и дифференциальной геометрии линий и поверхностей: задачи на вывод уравнений и построение плоских линий и поверхностей, на ис-

следование их взаимного расположения, преобразование и моделирование. Диагностические задания были ориентированы на комплексное исследование качественных показателей, отнесенных к выделенным уровням сформированности обобщенных приемов пространственного мышления.

Задачи на формирование образа предполагали создание графической и компьютерной модели изучаемого объекта, выделение его существенных свойств, переход от первичного образа к обобщенному представлению. Решение *задач на оперирование образом* требовало изменения положения геометрического объекта в пространстве, а также его структуры. Выполнение подобных действий осуществлялось в воображении: учащийся мысленно отвлекался от объекта, прослеживал его преобразования и воплощал новый образ в соответствии с заданными условиями. Уровень трудности *задач на ориентацию в пространстве* определялся возможностью выбора точки отсчета: учащиеся либо выбирали ее самостоятельно, либо решали задачу с заданной извне начальной точкой.

В табл. 2 представлен диагностический тест, в соответствии с результатами выполнения которого проводилась дифференциация будущих бакалавров педагогического образования по уровню развития пространственного компонента мыслительной деятельности.

Значимость представленной диагностической методики состоит в обобщении научно-методических исследований по проблеме развития пространственного мышления в процессе обучения геометрии, выделении основных структурных элементов данного вида умственной деятельности, определении уровней и показателей сформированности обобщенных приемов пространственного мышления. Разработанные диагностические материалы могут быть использованы в практике преподавания геометрии в вузах, техникумах, колледжах педагогического профиля, при создании учебных программ подготовки учителей математики. Адаптированная система диагностических заданий применима на уроках математики в школе, в классах математического профиля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богуславский М. В., Неборский Е. В. Стратегические тенденции развития системы высшего образования в Российской Федерации // Гуманитарные исследования Центральной России. 2017. № 2. С. 7–20.
2. Boguslavskii M. V., Neborskii Y. V. Development of the university education in the context of globalization // 2016 International Conference „Education Environment for the Information Age” (EEIA-2016). Moscow, Russia, June 6–7, 2016. S. V. Ivanova, E. V. Nikulchev (eds.). SHS Web of Conferences. 2016. Vol. 29. DOI: 10.1051/shsconf/20162901011.
3. Хамитов Э. Подготовка современного учителя – основа развития образования // Народное образование. 2000. № 6. С. 284–286.
4. Глейзер Г. Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. М.: Педагогика, 1978.
5. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980.
6. Бреус И. А. Развитие пространственного воображения будущих учителей математики в процессе их геометрической подготовки: дис. ... канд. пед. наук. Ростов н/Д., 2002.
7. Вальцева И. Г. Исследование пространственного воображения учащихся старших классов // Вопросы обучения математике в вечерней школе. Л., 1971. С. 43–61.
8. Каплунович И. Я. Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Новгород, НРЦРО, 1996.

9. Цукарь, А. Я. Развитие пространственного воображения. СПб.: Союз, 2000.
10. Устиловская А. А. Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: дис. ... канд. психол. наук. М., 2008.

REFERENCES

1. Boguslavskiy M. V., Neborskiy E. V. Strategicheskiye tendentsii razvitiya sistemy vyshego obrazovaniya v Rossiyskoy Federatsii. *Gumanitarnyye issledovaniya Tsentralnoy Rossii*. 2017, No. 2, pp. 7–20.
2. Boguslavskii M. V., Neborskii E. V. Development of the university education in the context of globalization. In: Ivanova S. V., Nikulchev E. V. (eds.) *SHS 2016 International Conference „Education Environment for the Information Age” (EEIA-2016)*. Moscow, Russia, June 6–7, 2016. *Web of Conferences*. 2016, Vol. 29. DOI: 10.1051/shsconf/20162901011.
3. Khamitov E. Podgotovka sovremennogo uchitelya – osnova razvitiya obrazovaniya. *Narodnoe obrazovanie*, 2000, No. 6, pp. 284–286.
4. Gleizer G. D. *Razvitie prostranstvennykh predstavlenii shkolnikov pri obuchenii geometrii*. Moscow: Pedagogika, 1978.
5. Yakimanskaya I. S. *Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkolnikov*. Moscow: Pedagogika, 1980.
6. Breus I. A. Razvitie prostranstvennogo voobrazheniya budushchikh uchitelei matematiki v protsesse ikh geometricheskoi podgotovki. *PhD dissertation (Education)*. Rostov-on-Don, 2002.
7. Vyaltseva I. G. Issledovanie prostranstvennogo voobrazheniya uchashchikhsya starshikh klassov In: *Voprosy obucheniya matematike v vechernei shkole*. Leningrad, 1971. Pp. 43–61.
8. Kaplunovich I. Ya. *Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkolnikov v protsesse obucheniya matematike*. Novgorod: NRTsRO, 1996.
9. Tsukar A. Ya. *Razvitie prostranstvennogo voobrazheniya*. St. Petersburg: Soyuz, 2000.
10. Ustilovskaya A. A. Psikhologicheskie mekhanizmy preodoleniya znakovoi naturalizatsii idealnogo soderzhaniya geometricheskikh ponyatii. *PhD dissertation (Education)*. Moscow, 2008.

Жук Лариса Викторовна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики ее преподавания Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

e-mail: krasnikovalarisa@yandex.ru

Zhuk Larisa V., PhD in Education, associate professor, Mathematics and Methods of its teaching Department, I. A. Bunin Yelets State University

e-mail: krasnikovalarisa@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 06.05.2019

The article was received on 06.05.2019