УДК 371.24+371.212
ББК 74

DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-102-115

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ УЧЕБНЫХ ТЕОРИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В СОДЕРЖАНИИ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

В. И. Горбачев, Е. Н. Пузырева, Н. В. Трошина

Аннотация. *В классической теории и методике обучения математике исследуются категории математического пространства, учебной теории математического пространства, моделей математического пространства. Содержание общего математического образования представлено спектрами моделей числового, геометрического, евклидова, функционального, предикатного, стохастического пространств, неявно используемых в учебной математической деятельности. Модели задают целостную систему образов объектов математических пространств, в их содержании формируется имеющая наглядно-образный уровень абстрактно-алгоритмическая деятельность. Систематизация моделей каждого из математических пространств позволяет структурировать содержание учебной математической деятельности уровня общего математического образования. Модельные представления математических пространств создают основу для их абстрагирования в содержании соответствующих учебных теорий. На базе модельных образов объектов математического пространства возникает и разрешается задача дедуктивного представления его абстрактной формы, глубже и точнее исследуются его закономерности.*

Ключевые слова: *теория и методика обучения математике, общее математическое образование, математическое пространство, учебная теория математического пространства, модель математического пространства.*

Для цитирования: *Горбачев В. И., Пузырева Е. Н., Трошина Н. В.* Систематизация моделей учебных теорий математических пространств в содержании общего образования // Наука и школа. 2024. № 6. С. 102–115. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.

SYSTEMATIZATION OF EDUCATIONAL THEORIES OF MATHEMATICAL SPACES MODELS IN THE CONTENT OF GENERAL EDUCATION

V. I. Gorbachev, E. N. Puzyreva, N. V. Troshina

Abstract. *In the classical theory and methodology of teaching mathematics, the categories of mathematical space, educational theory of mathematical space, and models of mathematical space are studied. The content of general mathematical education is represented by spectra of models of numerical, geometric, Euclidean, functional, predicate, stochastic spaces, implicitly used in educational mathematical activities. Models form an integral system of images of objects in mathematical spaces; in their content, abstract-algorithmic activity is formed that has a visual-figurative level. Systematization of the models of each of the mathematical spaces makes it possible to structure the content of educational mathematical activities at the level of general mathematical education. Model representations of mathematical spaces create the basis for their abstraction in the content of relevant educational theories. On the basis of model images of objects of mathematical space, the problem of deductive representation of its abstract form arises and is resolved, its patterns are studied more deeply and more accurately.*

Keywords: *theory and methodology of teaching mathematics, general mathematical education, mathematical space, educational theory of mathematical space, model of mathematical space.*

Cite as: Gorbachev V. I., Puzyreva E. N., Troshina N. V. Systematization of educational theories of mathematical spaces models in the content of general education. *Nauka i shkola.* 2024, No. 6, pp. 102–115. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-6-102-115.

В дидактическом анализе содержания общего образования понятие предметной модели, отражающей сущность определенных процессов, явлений, закономерностей, имеет дисциплинарный характер своего описания (биологические, физические, математические) и в целом не систематизировано. Классическая теория и методика обучения математике содержание общего математического образования описывает в спектре «содержательно-методических линий обучения», вне субъектных представлений математического пространства и его моделей, вне исследования закономерностей пространства в системе понятий соответствующей учебной теории. В современной методической системе обучения математике принято лишь интуитивное, идущее от Галилея и Кеплера, понятие математической модели как математической абстракции определенного процесса реального мира, направленной на его описание математическими методами [1].

В методической задаче проектирования содержания общего математического образования, направленного на формирование у субъекта абстрактного математического мышления, понятие модели трактуется в непосредственной связи с категориями математического пространства и его учебной теории [2]. Такая трактовка математической модели, во-первых, отражает психолого-дидактическую закономерность формирования мышления в содержании его наглядно-образного и вербально-логического уровней, и, во-вторых, наследует идущую от «Оснований геометрии» Д. Гильберта [3] логическую трактовку модели учебной математической теории.

Математическое пространство – конструкция субъектного сознания в математическом отражении определенных свойств реального мира, характеризуемая совокупностью свойств его объектов, операций, отношений, преобразований, исследуемых на последовательных уровнях деятельности содержательного абстрагирования.

Учебная теория математического пространства – самостоятельная конструкция субъектного сознания, представленная системой определяемых понятий абстрактного математического пространства и направленная на установление, логико-содержательное обоснование его закономерностей.

Модель математического пространства – характеризующая определенное образное представление математического пространства конструкция субъектного сознания с наглядно-образным уровнем исследования свойств модельных образов объектов, операций, отношений пространства. Модель математического пространства, образы объектов которой выступают конкретной интерпретацией дедуктивных понятий теории и обладают системой ее абстрактных свойств, становится моделью учебной математической теории [4].

В отличие от описательной методической трактовки математических моделей пространственно-теоретический подход проектирования содержания общего образования базируется на модельных представлениях математического пространства, переходе к его абстрактному представлению в понятийном конструировании соответствующей учебной теории с последующим преобразованием моделей математического пространства в модели учебной математической теории [5].

В методологическом плане содержание общего математического образования определяют числовое, геометрическое, евклидово, функциональное, предикатное и стохастическое пространства. Каждое из математических пространств создается в математическом отражении вполне определенных свойств реального мира, выступает эмпирическим, теоретическим конструктами субъектного сознания, развивается в последовательных уровнях деятельности содержательного абстрагирования. Математические пространства представлены не выделяемыми в «содержательно-методических линиях», но объективно существующими спектрами взаимосвязанных моделей, описываемых различными образами объектов, операций, отношений. В абстрагировании от модельных образов объектов математические пространства становятся абстрактными, их закономерности устанавливаются в содержании учебных теорий, характеризуемых понятийной формой аналитико-синтетического метода исследования [2].

На уровне абстрагирования «от предметных свойств реального мира» математические пространства задаются пространственно-специфическими моделями с различными образами объектов, операций, отношений, преобразований, модельной формой свойств математического пространства. В сочетании абстрактно-алгоритмического и системно-структурного видов деятельности в наглядно-образной форме осуществляются как семантический анализ свойственных математическому пространству понятий-терминов, так и синтаксический анализ математических предложений о модельных свойствах, связях объектов, операций математического пространства.

На уровне абстрагирования «от образных представлений объектов математического пространства» введенные в моделях математического пространства понятия-термины становятся определяемыми понятиями учебной теории абстрактного математического пространства. В абстрактно-дедуктивном и аналитико-синтетическом видах деятельности анализ понятий имеет вербально-логическую форму, анализ математических предложений учебной теории объективно сопровождается процедурой математического доказательства. Последовательные уровни математического абстрагирования в существенной мере позволяют достигать «сочетание фундаментальности обучения математике в школе с новыми подходами к построению образовательной системы» [6, с. 88].

Модели пространства числовых систем

В математическом отражении счета, измерения, оперирования реальной человеческой практики числовое пространство (Д. Пеано, К. Гаусс, Р. Дедекинд, Ф. Фробениус) представлено расширяющимися спектрами геометрических, арифметических и алгебраических моделей.

В каждой из расширяющихся моделей понятия натурального, целого, рационального, действительного числа, понятия операций, отношения порядка представлены различными модельно-специфическими образами. В спектрах соответствующих каждой из числовых систем моделей устанавливаются свойства чисел, операций, свойства числовых систем [4].

Пространство натуральных чисел представлено геометрической и арифметической моделями. Геометрическими образами системы натуральных чисел являются точки асимметричной шкалы с фиксированными началом счета, единицей счета, операциями сложения, умножения, отношением порядка

Арифметические образы натуральных чисел задаются систематической записью в форме разложения по неотрицательным степеням основания системы счисления, операции сложения и умножения сводятся к поразрядным арифметическим операциям, отношение порядка задается операцией суммирования. В содержании геометрической и арифметической моделей устанавливаются их общие свойства, позволяющие их выделить в качестве аксиом абстрактного пространства натуральных чисел, преобразовать его модели в модели учебной теории.

Пространство целых чисел задается геометрической, арифметической, алгебраической моделями, расширяющими соответствующие модели натуральных чисел свойством симметрии. В геометрической модели на базе свойства симметрии вводятся понятие модуля целого числа, модульные операции сложения и умножения. На основе геометрического образа модуля в арифметической модели определяются модульные арифметические операции. Алгебраическая модель характеризуется бесконечными классами эквивалентности упорядоченных пар натуральных чисел, определяет алгебраический способ расширения системы натуральных чисел. Общее для всех моделей свойство симметрии обосновывает справедливость аксиом алгебраической структуры кольца, позволяющих определить аксиоматическую теорию абстрактного пространства целых чисел.

Пространство рациональных чисел также развивает модельное представление целых чисел в системе образов геометрической, арифметической и алгебраической моделей. Геометрическая модель пространства рациональных чисел существенно расширяет геометрическую модель целых чисел в процедуре конечного дробления единицы счета, что приводит к усложнению оперирования геометрическими образами рациональных чисел. Также неочевидный характер расширения арифметической модели целых чисел имеет арифметическая модель рациональных чисел, представленная как конечными, так и бесконечными периодическими десятичными дробями, для которых операции сложения и умножения определяются лишь опосредованно. Алгебраическая модель пространства рациональных чисел представлена бесконечными классами эквивалентности упорядоченных пар целых и натуральных чисел, в явной форме определяет алгебраическую структуру поля, что позволяет аксиоматизировать учебную теорию абстрактного пространства рациональных чисел.

Пространство действительных чисел, обладающее фундаментальными свойствами непрерывности и континуальной бесконечности, представлено целым спектром не выделенных в содержании общего математического образования моделей – линейной и периодической геометрическими моделями, непрерывной и дискретной арифметическими моделями, алгебраической моделью. Линейная геометрическая модель пространства действительных чисел расширяет геометрическую модель рациональных чисел бесконечным дроблением единицы счета, добавлением обоснованных процедурой дробления иррациональных чисел, создавая интуитивное представление ее непрерывности. Периодическая геометрическая модель действительных чисел представлена всеми точками единичной окружности с фиксированным началом и направлением счета, характеризацией точек окружности величиной соответствующего центрального угла, выраженного в радианах. В условиях индексации объектами непрерывной арифметической модели линейная и периодическая геометрические модели превращаются в важные математические конструкты – числовую прямую и числовую окружность. Непрерывная арифметическая модель действительных чисел расширяет арифметическую модель рациональных чисел бесконечными непериодическими десятичными дробями с утратой определения операций сложения и умножения. В процедуре приближения бесконечной десятичной дроби конечной дробью и оценки погрешности приближения непрерывная арифметическая модель преобразуется в дискретную арифметическую модель. Алгебраическая модель действительных чисел задается классами эквивалентных сходящихся последовательностей рациональных чисел, приводит к аксиоматическому определению абстрактного пространства действительных чисел.

Модели каждого из числовых пространств не только задают полный спектр их модельных образов и способов оперирования. Они позволяют установить фундаментальные свойств числовых пространств. Если геометрическая модель пространства натуральных чисел характеризует его как бесконечное в форме существования натурального числа, непосредственно следующего за предыдущим, то арифметическая модель фиксирует математическое трактовку свойства бесконечности – свойство равномощности множества натуральных чисел и его собственного подмножества четных натуральных чисел. Арифметические модели целых и рациональных чисел также позволяют установить свойство их счетной бесконечности в процедуре нумерации натуральными числами. Однако процедура нумерации натуральными числами непрерывной арифметической модели действительных чисел приводит к доказательству их несчетности – свойству континуальной бесконечности системы действительных чисел. Модели каждой из числовых систем характеризуют аксиоматический метод построения учебных теорий соответствующих абстрактных математических пространств, фиксируя в качестве аксиом общие всем моделям пространства свойства.

Модели геометрического пространства

Геометрическое пространство – формирующаяся в учебной геометрической деятельности конструкция субъектного сознания, созданная человеческой цивилизацией в математическом отражении свойств формы, меры, пространственной расположенности, субъектной ориентации реального физического мира. Выступающее результатом последовательных уровней деятельности содержательного абстрагирования геометрическое пространство (Евклид, Д. Гильберт, Н. И. Лобачевский, Ф. Клейн) представлено наглядно-образной, векторной, арифметической моделями. Каждая из моделей геометрического пространства описывается модельно-специфическими образами его объектов, отношений, преобразований, интегрируемыми в условиях их сформированности в человеческом сознании.

Наглядно-образная модель геометрического пространства, широко представленная в «Началах» Евклида, характеризуется конструктивными изображениями геометрических фигур, направленными на создание в субъектном сознании их пространственных геометрических образов, исследование пространственных, конструктивных, метрических свойств. Развивающаяся от примитивных чертежей на песке до современных динамических геометрических образов в компьютерных математических средах конструктивная деятельность привела к систематизации базовых геометрических фигур (точка, прямая, окружность, плоскость, сфера), отношений принадлежности, параллельности, перпендикулярности, преобразований движения, подобия. В системе конструктивных действий выделяется мысленная форма пространственных образов бесконечных классов геометрических фигур, охватываемых понятием геометрической фигуры, преобразований движения, подобия, параллельного и центрального проектирования. В совокупности пространственных геометрических образов геометрических фигур и их преобразований выделяется система пространственных свойств: расположенных на прямой, окружности, плоскости, круге, пространстве, обладающих свойствами взаимной связи, характеризующих фундаментальные свойства геометрического пространства. Пространственные свойства наглядно-образной модели дополняются метрическими свойствами длины отрезка и плоской линии, величины плоского угла между прямыми и линиями, площадей плоских многоугольников и плоских фигур, объемов многогранников и пространственных тел. В интеграции пространственных, конструктивных, метрических свойств создаются новые конструкции геометрических фигур. Базовыми понятиями наглядно-образной модели геометрического пространства выступают понятия геометрической фигуры, преобразований движения, подобия в их родовидовой систематизации, свойства которых устанавливаются в аналитико-синтетической деятельности математического доказательства [7].

Векторная модель геометрического пространства задается построением векторных моделей геометрических фигур и исследованием их свойств в содержании векторного метода:

- созданием аппарата векторной алгебры в наглядно-образной форме понятий вектора, векторных операций, свойств коллинеарности, ортогональности, компланарности векторов;
- формированием на основе понятий базиса и размерности представлений одномерного, двумерного, трехмерного векторных пространств;
- построением в представлении векторных пространств векторных моделей геометрических фигур, расположенных на прямой, в плоскости, в пространстве посредством точечно-векторного описания их характеристических свойств;
- преобразованием векторного пространства в евклидово введением операций скалярного, векторного, смешанного произведений векторов для исследования метрических свойств векторных моделей геометрических фигур;
- исследованием средствами векторной алгебры пространственных, метрических свойств векторных моделей геометрических фигур с последующей их интерпретацией в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства.

Арифметическая модель геометрического пространства задается образами плоских и пространственных геометрических фигур, заданными в представлении прямоугольных декартовых системам координат характеристическими свойствами точек. Векторные модели геометрических фигур в соответствующей прямоугольной декартовой системе координат последовательно преобразуются в координатные модели, в отражающие зависимости координат аналитические модели – алгебраические уравнения, неравенства, системы с переменными. Построение аналитических моделей геометрических фигур позволяет осуществлять анализ их пространственных, метрических свойств аналитическим методом – исследованием уравнений, неравенств, систем в системе равносильных преобразований.

Каждой из моделей геометрического пространства соответствуют дополняющие друг друга методы исследования свойств геометрических фигур. Однако математико-мировоззренческая значимость моделей геометрического пространства выделением различных методов исследования свойств геометрических фигур не ограничивается. В содержании наглядно-образной, векторной, арифметической моделей геометрического пространства для модельных образов базовых геометрических фигур устанавливается общая моделям система свойств принадлежности, порядка, параллельности. В абстрагировании от образных представлений общие для каждой из моделей свойства становятся аксиомами абстрактного геометрического пространства, приводят к конструированию его учебной математической теории.

Модели евклидова пространства

В содержании общеобразовательного курса геометрии евклидово пространство (Р. Декарт, П. Ферма, Л. Эйлер, Г. Вейль) рассматривается в содержании геометрического пространства, их модельные представления не выделены и, тем более, не дифференцированы. В математическом же плане евклидово и геометрическое пространства являются различными – у них разные модельные образы объектов, разные системы свойств, разные системы аксиом соответствующих пространствам учебных математических теорий.

Евклидово пространство – конструкция субъектного сознания в математическом отражении свойств размерности, пространственной ориентации, метрической характеризации физического пространства, представленная содержанием векторной, координатной, арифметической моделей [4].

Векторная модель евклидова пространства задается наглядно-образным представлением понятий точки и вектора, векторных операций, векторных свойств. Для ненулевого вектора совокупность всех произведений действительных чисел на вектор образует одномерное векторное пространство, совокупность всех линейных комбинаций двух неколлинеарных векторов порождает двумерное векторное пространство, совокупность линейных комбинаций трех некомпланарных векторов образует трехмерное векторное пространство. Понятия базиса и размерности являются фундаментальными в каждом из векторных пространств. Задание в двумерном, трехмерном векторных пространствах скалярного произведения векторов преобразует их в евклидовы пространства соответствующих размерностей с вычислением длин векторов и величины углов между векторами. Для вычисления площади многоугольников, построенных на неколлинеарных векторах, используется операция векторного произведения. Вычисление объемов многогранников, порожденных тройкой некомпланарных векторов, осуществляется в композиции векторного и скалярного произведений. В содержании векторных моделей евклидова пространства создаются векторные модели геометрических фигур, задаваемые векторными условиями описания характеристических свойств точек геометрической фигуры. Векторные модели геометрических фигур допускают исследование их пространственных, метрических свойств с помощью аппарата векторной алгебры.

На базе векторной модели евклидова пространства в процедуре перехода к координатам векторов, векторных операций создается его координатная модель. В двумерном, трехмерном евклидовых пространствах разложение вектора по базисным векторам приводит к понятию его координат. В двумерном евклидовом пространстве координатами вектора называется упорядоченная пара действительных чисел, в трехмерном евклидовом пространстве – упорядоченная тройка. Определение координат точки как координат соответствующего радиус-вектора также приводит к их характеризации упорядоченными парами, тройками действительных чисел. В результате арифметические пространства R^2 и R^3 с их покоординатными операциями выступают координатными моделями двумерного и трехмерного евклидовых пространств. При этом создаваемые в векторной модели евклидова пространства векторные модели геометрических фигур в содержании арифметических пространств преобразуются в координатные модели. В процедуре арифметического анализа координатной модели геометрической фигуры устанавливаются ее пространственные, метрические свойства.

Арифметические пространства R^2 и R^3 с их геометрическими моделями в форме прямоугольных декартовых систем координат плоскости и пространства приводят к отождествлению пространственного образа геометрической фигуры и ее координатной модели. Координатная форма описания характеристического свойства точек геометрической фигуры позволяет исследовать зависимость координат точек в форме аналитической модели геометрической фигуры – уравнения, неравенства, системы с двумя переменными (двумерная модель евклидова пространства), с тремя переменными (трехмерная модель евклидова пространства). Исследование аналитической модели геометрической фигуры алгебраическими средствами в сочетании с анализом ее пространственного образа в прямоугольной декартовой системе координат создает наиболее эффективную форму учебной геометрической деятельности.

Каждая из моделей евклидова пространства характеризует соответствующий этап исследования пространственных, метрических свойств геометрических фигур. Но модели евклидова пространства определяют методологию конструирования учебной теории абстрактного евклидова пространства. В содержании каждой из моделей устанавливаются свойства операций сложения векторов, произведения числа на вектор, размерности пространства, скалярного произведения векторов, задающие алгебраическую структуру трехмерного евклидова пространства над полем действительных чисел. Каждая из моделей при этом становится моделью учебной теории трехмерного евклидова пространства, в каждой из них становятся справедливыми все свойства векторов, операций, указанные в системе аксиом евклидова пространства.

Модели функционального пространства

В отличие от числового, геометрического, евклидова пространств, пространство нечисловых и числовых функций имеет опосредованный характер, создается и развивается на их основе. Функциональное пространство – опосредованная представлениями числового, геометрического, евклидова пространств конструкция субъектного сознания, формирующаяся в математическом отражении зависимостей реального мира с однозначно определенным образом. Функциональное пространство (И. Ньютон, Г. Лейбниц, К. Вейерштрасс, О. Коши, Г. Кантор) представлено целостным спектром геометрических и числовых функциональных моделей с системой общих и модельно-специфических свойств фундаментального понятия функции.

В спектре функциональных моделей, направленных на формирование понятий общей теории функций, выделяется пространственно-векторная модель, представленная функциями нескольких переменных, заданными операциями сложения векторов, произведения числа на вектор, скалярного и векторного произведения и их композициями. Обладающая как общефункциональными, так и модельно-специфическими свойствами пространственно-векторная модель позволяет установить функциональную форму аксиоматического определения трехмерного евклидова пространства. Пространственно-точечная модель функционального пространства задается преобразованиями плоскости, выступающими биективными функциями одной переменной, обладающими свойством обратимости, определяющими в геометрическом пространстве понятия равенства и подобия, функциональную систематизацию преобразований движения и подобия. На множестве фигур геометрического пространства пространственно-метрическая модель функционального пространства определяется характеризующими метрические свойства геометрических фигур функциями длины, угловой величины, площади, объема, представленными как в их аксиоматическом определении, так и в содержании предельного перехода. В содержании геометрических моделей осуществляется актуализация, конкретизация общих понятий функции, композиции функций, биективной функции, обратной функции. Вместе с тем, модельная форма выделенных функций позволяет установить их широкое представление в каждом из математических пространств.

Числовые модели (дискретная и непрерывная) функционального пространства задаются в «числовой» конкретизации понятия функции – функции одной переменной, заданной и принимающей значения в системе действительных чисел. Дискретная числовая модель функционального пространства представлена совокупностью функций натурального аргумента в форме бесконечных последовательностей рациональных, действительных чисел. В содержании дискретной числовой модели осуществляется характеризация всех иррациональных чисел бесконечными сходящимися последовательностями рациональных чисел, определяются операции сложения и умножения действительных чисел, в совокупности бесконечных сходящихся последовательностей действительных чисел создается «теория пределов числовых последовательностей».

На базе сформированного представления дискретной числовой модели функционального пространства создается его непрерывная числовая модель, представленная понятием числовой элементарной функции, его систематизацией в спектре базовых классов числовых элементарных функций вместе с операциями композиции, комбинации, обращения функций. Свойства линейной упорядоченности, непрерывности системы действительных чисел, выступающей областью определения и множеством значений числовой элементарной функции, обосновывают общую систему свойств монотонности, экстремальности, асимптотичности, кусочной непрерывности всех функций непрерывной функциональной модели, их графическое представление. Свойство континуальной бесконечности системы действительных чисел в содержании непрерывной числовой модели приводит к использованию «метода пределов числовых последовательностей» – выделению сходящихся последовательностей значений переменной и анализу свойства сходимости последовательности соответствующих значений функции. В содержании непрерывной числовой модели функционального пространства метод предельного перехода позволяет установить понятие производной функции, исследовать связь свойств производной и свойств функции, определить понятие непрерывности числовой элементарной функции. Богатство понятий, свойств непрерывной числовой модели функционального пространства превращает ее в предмет отдельного исследования, приводит к разработке учебной теории пространства числовых элементарных функций.

Модели пространства числовых предикатов

Пространство числовых предикатов – конструкция субъектного сознания в математическом отражении условий равновесия, сравнения числовых величин с общей функциональной зависимостью, характеризующих динамические процессы реального мира. Структуру пространства числовых предикатов (Аль-Хорезми, Д. Кардано, Э. Галуа, К. Гаусс) составляют обладающие общими свойствами, связями типы – уравнения с одной переменной (одноместные предикаты равенства), системы уравнений с двумя переменными (конъюнкции двухместных предикатов равенства), неравенства с одной переменной (одноместные предикаты сравнения), системы неравенств с двумя переменными (конъюнкции двухместных предикатов сравнения). Каждый тип числовых предикатов представлен своими функционально определенными видами, порождаемыми определенными моделями пространства числовых элементарных функций – линейной, квадратичной, рациональной, иррациональной, тригонометрической, показательной, логарифмической, их композицией. Систематизация пространства числовых предикатов по типам, функционально определенным видам осуществляется с целью выделения методов исследования соответствующих областей истинности числовых предикатов. В качестве общих методов исследования пространства числовых предикатов выступают функционально-графический метод представления областей истинности каждого из функционально определенных видов числовых предикатов и функционально-аналитический метод их вычисления.

Формирование функционально-графического и функционально-аналитического методов исследования областей истинности числовых предикатов осуществляется в содержании функционально определенных моделей, представленных функционально определенными предикатами каждого типа. Совокупностям алгебраических (линейная, квадратичная, рациональная, иррациональная) и трансцендентных (тригонометрическая, показательная, логарифмическая) моделей функционального пространства соответствуют функционально определенные модели пространства числовых предикатов, наследующие графическое представление, функциональные равносильности, свойства функций.

В каждой из функционально определенных моделей пространства числовых предикатов исходным выступает функционально определенный вид уравнений с переменной. Графический образ функциональной модели приводит к функционально-графическому представлению множества решений уравнения – совокупности точек пересечения графиком функции оси абсцисс. Функционально-аналитический метод решения уравнения характеризуется вполне определенным спектром равносильностей общего вида, равносильностей на базе числовых тождеств, функциональных равносильностей, последовательным их применением для вычисления множества решений уравнения.

В содержании функционально определенной модели пространства числовых предикатов функционально-графический метод представления области истинности системы уравнений с двумя переменными связан с выделением линий общих решений каждого из уравнений и точек их пресечения. Функционально-аналитический метод решения системы уравнений предполагает ее сведение к системе стандартного вида с явным выражением одной переменной через другую, последующее ее преобразование к системе, содержащей уравнение с одной переменной.

Функционально определенный вид неравенств с переменной также сводится к исследованию соответствующего уравнения, поскольку его область истинности представлена промежутками числовой прямой, ограниченными решениями уравнения. Аналогично, область истинности функционально определенной системы неравенств с двумя переменными задается областями знакопостоянства координатной плоскости, выделенными линиями общих решений соответствующей системы уравнений, аналитической записью областей с требуемой системой знаков функций двух переменных.

Общая всем моделям пространства числовых предикатов закономерность сведения решения неравенств, систем уравнений и неравенств к исследованию уравнения с переменной приводит к целостному спектру обобщенных функционально-графических и функционально-аналитических способов их решения.

Модели пространства случайных событий, случайных величин, статистических совокупностей

Стохастическое пространство (Я. Бернулли, П. Л. Чебышев, А. Н. Колмогоров, А. М. Ляпунов) в математическом отражении категории «случайное» представлено пространствами случайных событий, случайных величин, статистических совокупностей.

На уровне абстрагирования «от предметных свойств реального мира» пространство случайных событий задается сюжетной формой испытаний, совокупностями имеющих конкретное содержание моделей элементарных, произвольных случайных событий, характеризуемых значениями функции вероятности. В совокупности всех сюжетно-практических модельных представлений пространства случайных событий выделяются конечная и счетно-конечная модели с различными способами определения функции вероятности, базирующиеся на них счетная и непрерывная модели. В сюжетной форме содержательного анализа каждой из моделей формируется система свойств благоприятствования, совместных и несовместных, зависимых и независимых случайных событий в их взаимной связи с операциями пространства случайных событий, создается комбинаторный метод вычисления значений функции вероятности на множествах элементарных, произвольных случайных событий [8].

Характеризация случайных событий не только значениями функции вероятности, но и определенными сюжетом испытания числовыми значениями приводит к понятию случайной величины, модельному представлению пространства случайных величин. Конечная, счетно-конечная, счетная, непрерывная модели пространства случайных событий порождают соответствующую систематизацию моделей пространства случайных величин, при этом непрерывные случайные величины в процедуре их ранжирования сводятся к конечным. Выступающая результатом определенного сюжетного испытания случайная величина описывается в системе аналитических и числовых характеристик. Числовые значения и значения функции вероятности всех элементарных событий структурируются в содержании закона распределения случайной величины. На основе закона распределения вычисляются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение случайной величины. Числовые характеристики случайной величины дополняются ее графическим представлением в форме полигона распределения, ее функции распределения. Система определяемых числовых и аналитических характеристик пространства случайных величин позволяет систематизировать его модели, заданные разными содержательными сюжетами, но имеющими общие закономерности – выделить законы биномиального, геометрического, гипергеометрического распределений случайных величин.

Развитые в модельных представлениях пространства случайных событий, пространства случайных величин сюжетная и понятийная формы задания функции вероятности в пространстве статистических совокупностей интерпретируется ее частотной трактовкой. В конечной совокупности совпадающих и различных числовых значений процедура ее ранжирования приводит к числовому аналогу закона распределения случайной величины – характеризации каждого из числовых значений соответствующей относительной частотой. Конкретные ранжированные совокупности числовых значений становятся числовыми величинами со статистической формой функции вероятности, к ним применим аппарат исследования дискретных числовых величин. В системе эмпирических понятий арифметического среднего, моды, медианы, дисперсии, среднего квадратичного отклонения, выделяемых в конечной модели пространства статистических совокупностей, производится статистическая обработка всех конечных статистических совокупностей. В статистическом плане вероятностный метод анализа пространства статистических совокупностей расширяется исследованием взаимных связей конечных выборочных совокупностей, приближенной оценкой числовых характеристик бесконечных генеральных совокупностей по числовым характеристикам выборочных совокупностей.

Выводы

Структурирование содержания общего математического образования спектрами базовых (геометрическое, числовое, евклидово) и производных (функциональное, предикатное, стохастическое) математических пространств в определенной мере созвучно его классическому описанию в совокупности «содержательно-методических линий». При этом если математические пространства (Д. Гильберт, А. Пуанкаре, Г. Вейль, А. Д. Александров) формируются в системе объективных уровней деятельности содержательного абстрагирования, то методическое развертывание «содержательно-методических линий» происходит лишь на уровне обыденного сознания.

Задание математических пространств системами соответствующих моделей, неявно используемых в «содержательно-методических линиях», осуществляется в системе учебных действий описания объектов каждого из математических пространств их различными образами, оперирования модельными образами объектов, исследования их наглядных свойств модельно-специфическими методами. На уровне абстрагирования «от предметных свойств реального мира» модели позволяют систематизировать свойства объектов, классов объектов, математических пространств. На уровне абстрагирования «от образных представлений объектов пространства» общие свойства моделей выделяются в качестве фундаментальных свойств абстрактного математического пространства и развиваются в содержании его учебной теории. На уровне абстрагирования «от содержания понятий» образные модели преобразуются в модели учебной теории абстрактного математического пространства.

Каждая из моделей математического пространства вносит свой вклад в развитие его представления. Арифметические модели пространства числовых систем позволяют исследовать свойства их счетности-континуальности, алгебраические модели устанавливают способы включения последующей числовой системой предыдущей, индексация геометрических моделей соответствующими арифметическими моделями приводит к понятию числовой прямой. В содержании наглядно-образной модели геометрического пространства развивается аналитико-синтетический метод исследования свойств геометрических фигур, в содержании его векторной модели формируется векторный метод исследования пространственных и метрических свойств векторных моделей геометрических фигур, арифметическая модель направлена на становление аналитического метода исследования аналитических моделей геометрических фигур.

Модельное представление математических пространств, создаваемое в системах пространственно-специфических действий абстрактно-алгоритмического и системно-структурного видов деятельности учения, приводит к формированию пространственно-математического (числового, геометрического, евклидова, функционального, предикатного, стохастического) типа мышления. В каждом из математических пространств соответствующая система моделей выступает основой абстрактно-дедуктивного конструирования учебной теории абстрактного математического пространства, аналитико-синтетического исследования его закономерностей, понятийно-категориального и теоретико-модельного анализа учебной теории с теоретико-математическим типом мышления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мордкович А. Г.* К концепции школьного математического образования // Математика в школе. 1989. № 2. С. 20–30.
2. *Антюхов А. В., Горбачев В. И., Трошина Н. В.* Пространственно-теоретический подход в формировании абстрактного мышления // Итоги науки: Научные исследования: колл. моногр. / Е. Ю. Ремшев, М. С. Калугина, И. И. Соколов [и др.]. Вып. 50. М.: Российская академия наук, 2022. С. 102–137.
3. *Гильберт Д.* Основания геометрии: пер с нем. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 389 с.
4. *Горбачев В. И.* Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития: моногр. М.: ИНФРА-М, 2020. 403 с.
5. *Тестов В. А.* Содержание современного образования: выбор пути // Образование и наука. 2017. Т. 19, № 8. С. 29–46.
6. *Егупова М. В.* Практико-ориентированное обучение математике в школе: проблемы и перспективы научных исследований // Наука и школа. 2022. № 4. С. 85–95.
7. *Горбачев В. И.* Теория геометрических фигур геометрического пространства в методологии теоретического типа мышления // Наука и школа. 2016. № 4. С. 132–144.
8. *Ветохин А. Н., Деза Е. И.* О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226.

REFERENCES

1. Mordkovich A. G. K kontseptsii shkolnogo matematicheskogo obrazovanija. *Matematika v shkole*. 1989, No. 2, pp. 20–30.
2. Antyukhov A. V., Gorbachev V. I., Troshina N. V. Prostranstvenno-teoreticheskiy podkhod v formirovanii abstraktnogo myshleniya. In: Itogi nauki: Nauchnye issledovaniya. *Coll. monogr.* Iss. 50. Moscow: Rossiyskaya akademiya nauk, 2022. Pp. 102–137.
3. Hilbert D. *Osnovaniya geometrii*. Transl. from German. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948. 389 p.
4. Gorbachev V. I. *Predmetnye kompetentsii obshchego matematicheskogo obrazovaniya v kategorii subyektnogo razvitiya: monogr.* Moscow: INFRA-M, 2020. 403 p.
5. Testov V. A. Soderzhanie sovremennogo obrazovaniya: vybor puti. *Obrazovanie i nauka*. 2017, Vol. 19, No. 8, pp. 29–46.
6. Egupova M. V. Praktiko-orientirovannoe obuchenie matematike v shkole: problemy i perspektivy nauchnykh issledovaniy. *Nauka i shkola*. 2022, No. 4, pp. 85–95.
7. Gorbachev V. I. Teoriya geometricheskikh figur geometricheskogo prostranstva v metodologii teoreticheskogo tipa myshleniya. *Nauka i shkola*. 2016, No. 4, pp. 132–144.
8. Vetokhin A. N., Deza E. I. O meste teoretiko-verojatnostnykh zadach v matematicheskoy podgotovke shkolnikov. *Nauka i shkola*. 2023, No. 2, pp. 214–226.

Горбачев Василий Иванович, доктор педагогических наук, профессор, директор естественно-научного института, Брянский государственный университет

e-mail: enibgu@mail.ru

Gorbachev Vasily I., ScD in Education, Full Professor, Director, Natural Science Institute, Bryansk State Academician I. G. Petrovski University

e-mail: enibgu@mail.ru

Пузырева Елизавета Николаевна, старший преподаватель кафедры информатики и прикладной математики, Брянский государственный университет

e-mail: puzyreva-knysh@yandex.ru

Puzyreva Elisaveta N., Senior Lecturer, Informatics and Applied Mathematics Department, Bryansk State Academician I. G. Petrovski University

e-mail: puzyreva-knysh@yandex.ru

Трошина Наталья Викторовна, кандидат филологических наук, доцент, заведующая кафедрой русского языка, Брянского государственный университет

e-mail: natalya_troshina@mail.ru

Troshina Natalia V., PhD in Philology, Associate Professor, Head, Russian Language Department, Bryansk State Academician I. G. Petrovski University

e-mail: natalya_troshina@mail.ru

Статья поступила в редакцию 15.04.2024
The article was received on 15.04.2024